МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математического анализа

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

(начала теории)

1 9 9 3

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета МГУ от 18 сентября 1992 г.

Дорогому Владимиру Михайловичу
в знак давней дружбы. 21.03.03

Составитель

кандидат физико-математических наук, доцент
О.С. Ивашев-Мусатов

Предисловие

Из школы известно понятие интеграла и некоторые его свойства. Напомним одно из них - геометрический смысл определенного интеграла - это разность площадей фигур, ограниченных графиком подынтегральной функции и отрезком интегрирования (вычитается площадь фигуры, расположенной под осью абсцисс). С помощью этого интеграла, изобретенного в конце XVП века, были решены многие задачи естествознания. Но уже в середине XIX века для решения ряда задач потребовалось обобщить и понятие площади (объема), и понятие интеграла. Удачнее всего, как это показала история, эту проблему решил А.Лебег в самом начале XX века, введя меру и интеграл Лебега. Оказалось, что если в формулировке геометрического смысла интеграла слова "площадь" и "фигура" заменить на "мера" и "множество", то получим интеграл Лебега, и это можно взять в качестве его определения. Интеграл Лебега обладает всеми свойствами определенного интеграла и рядом дополнительных свойств, что позволяет решать более сложные задачи естествознания.

Здесь предлагается вариант изложения (подробный конспект) начал теории меры и интеграла Лебега, не предполагающий знакомства с теорией определенного интеграла. Дальнейшее, более глубокое изучение можно провести по любому руководству (например, А.Н.Колмогоров и С.В.Фомин "Элементы теории функций и функционального анализа"). В процессе доказательств, помещенных в тексте, над некоторыми равенствами (знаками включения и т.п.) стоит (ж) - это значит, что соответствующее доказательство приведено далее, чтобы не разрывать ход вычислений. Или там стоит номер теоремы (формулы, параграфа, если они в другом параграфе), в силу которой написано это равенство (включение, неравенство и т.п.).

§ I. Мера множества

Мера множества – обобщение понятий площади (объема). Для начала рассматриваем меру только для множеств на прямой, поскольку это нагляднее и проще. Но при анализе доказательств обнаруживается, что почти все они не зависят от размерности того пространства, в котором находится множество.

I. <u>Мера ограниченного множества.</u> В этом пункте все рассматриваемые множества принадлежат отрезку $\Pi \subset \mathbb{R}$ (общему для всех этих множеств). Для любого промежутка $p = \langle a, b \rangle$ его длина – число $m(p) = b - a$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ определим внешнюю меру A – это число

$$\mu^* A \overset{def}{=} \inf \left\{ \sum m(p_i) \,\middle|\, A \subset \bigcup p_i,\ \forall p_i - \text{промежуток} \right\}. \tag{1}$$

Здесь для множества A берутся все мыслимые последовательности промежутков p_i таких, что $\bigcup p_i \supset A$ – говорят "$\bigcup p_i$ – покрытие A". Для $\forall \bigcup p_i \supset A$ берется число $\sum m(p_i)$, эти числа образуют не пустое множество, (т.к. $A \subset \Pi$). Поскольку все эти числа неотрицательны, то правая часть в (1) существует для любого множества $A \subset \Pi$ и $\mu^* A \geqslant 0$. Итак,

$$\text{для } \forall A \subset \Pi\ \exists \mu^* A;\ \mu^* A \geqslant 0;\ \forall \bigcup p_i \supset A \Rightarrow \mu^* A \leqslant \sum m(p_i). \tag{2}$$

Примеры. 1. $A = \{a\}$ – одна точка $\Rightarrow \mu^* A = 0$. Действительно, при $\forall \varepsilon > 0$ $A \subset [a, a + \frac{\varepsilon}{2}] \Rightarrow \mu^* A \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \mu^* A = 0$.

2. $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ – счетное множество $\Rightarrow \mu^* A = 0$. Действительно, при $\forall \varepsilon > 0$ $A \subset \bigcup [a_n, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}] \Rightarrow \mu^* A \leqslant \sum \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \mu^* A = 0$.

3. $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ – конечное множество $\Rightarrow \mu^* A = 0$. При доказательстве можно повторить рассуждения из примера 2.

Множество A измеримо $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{P}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} p_i$, (где $\forall p_i$ – промежуток и $p_i \cap p_j = \varnothing$ при $i \neq j$) такое, что $\mu^*(A \Delta \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Для измеримого множества A мерой A называют число $\mu A=\mu^* A$.

Теорема 1. $\mu^* A=0 \Longleftrightarrow A$ измеримо и $\mu A=0$.

Докажем переход $\Rightarrow$: $\forall \varepsilon>0\ \exists \bigcup P_i \supset A$ ($\forall P_i$ – промежуток) и $\sum m(P_i)<\varepsilon$. Положим $\mathcal{P}_\varepsilon = P_1 \Rightarrow A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon = (A \setminus P_1) \cup (P_1 \setminus A) \subset \bigcup P_i$, [т.к. $P_1 \setminus A \subset P_1$ и $A \setminus P_1 \subset \bigcup_{i>1} P_i$] $\Rightarrow \mu^*(A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon) \le \sum m(P_i) < \varepsilon \Rightarrow A$ измеримо и $\mu A=0$.

Докажем переход $\Leftarrow$: $\mu A=0 \Rightarrow \mu^* A=0$ по определению.

Пример 4. A – конечное или счетное множество $\Rightarrow A$ измеримо и $\mu A=0$. Это следует из теоремы 1 и примеров 1–3.

Отметим как следствие из доказательства теоремы 1, что

$$\mu A=0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bigcup P_i \supset A, \text{ что } \sum m(P_i)<\varepsilon, \qquad (5)$$

где $\forall P_i$ – промежуток.

Теорема 2(монотонность меры). $A \subset B \Rightarrow \mu^* A \le \mu^* B$.

Для $\forall \bigcup P_i \supset B \Rightarrow \bigcup P_i \supset A \Rightarrow \mu^* A \le \sum m(P_i) \Rightarrow \mu^* A \le \inf\{\sum m(P_i) \mid \bigcup P_i \supset B\} = \mu^* B$.

Следствие. Пустое множество $\varnothing$ измеримо и $\mu\varnothing=0$. Действительно, любое множество $A \supset \varnothing$, в частности,и с $\mu A=0$.

Теорема 3(полуаддитивность меры). $\mu^* \bigcup A_i \le \sum \mu^* A_i$.

Если $\sum \mu^* A_i=\infty$, то неравенство очевидно. Пусть $\sum \mu^* A_i<\infty$. Тогда для $\forall \varepsilon>0$, и $\forall i \in N\ \exists \bigcup_\nu P_{i\nu} \supset A_i$ и $\sum_\nu m(P_{i\nu}) < \mu^* A_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_i A_i \subset \bigcup_{i,\nu} P_{i\nu} \Rightarrow \mu^* \bigcup_i A_i \le \sum_i \sum_\nu m(P_{i\nu}) < \sum_i \left(\mu^* A_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) =$$

$= \sum_i \mu^* A_i + \varepsilon \Rightarrow \mu^* \bigcup A_i \le \sum \mu^* A_i$, т.к. взято $\forall \varepsilon>0$.

Теорема 4(пренебрежение множеством меры нуль). $\mu A=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu^*(B \cup A)=\mu^* B$ и $\mu^*(B \setminus A)=\mu^* B$.

$$B \subset B \cup A \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \mu^* B \le \mu^*(B \cup A) \overset{\text{T.3}}{\le} \mu^* B + \mu^* A = \mu^* B \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^* B.$$

$B \setminus A \subset B \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \mu^*(B \setminus A) \le \mu^* B$ и $B \subset (B \setminus A) \cup A \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \mu^* B \le \mu^*((B \setminus A) \cup A) \overset{\text{T.3}}{\le} \mu^*(B \setminus A) + \mu^* A = \mu^*(B \setminus A)$, из двух полученных неравенств следует равенство $\mu^*(B \setminus A) = \mu^* B$.

Множество $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$, $\forall p_i$ - промежуток и $p_i \cap p_j=\emptyset$ при $i\neq j$ называют элементарным. Любой промежуток - элементарное множество.

Теорема 5. Элементарное множество измеримо. Для промежутка p его мера $\mu(p)=m(p)$. Множество $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$ - элементарное $\Rightarrow \mu A=\sum\limits_{i=1}^{n} m(p_i)$.

Если A - элементарное множество, то для $\forall\varepsilon>0$ положим $\mathcal{P}_\varepsilon=A$. Тогда $A\Delta\mathcal{P}_\varepsilon=\emptyset \Rightarrow \mu^*(A\Delta\mathcal{P}_\varepsilon)=0<\varepsilon \Rightarrow A$ измеримо. Для промежутка $p=\langle a,b\rangle$ отрезок $q=[a,b]$ таков, что $m(q)=m(p)$ и $\mu(q)=\mu(p)$ (т.к. $[a,b]=p\cup\{a,b\}$ (Т.4 и пример 3). Поэтому достаточно доказать равенство $\mu(q)=m(q)$. Возьмем $\forall \bigcup p_i\supset q$, $p_i=\langle a_i,b_i\rangle$. Для $\forall\varepsilon>0$ интервалы $\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)=q_i\supset p_i$ при $\forall i\Rightarrow q\subset\bigcup q_i$ и $m(q_i)=m(p_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$. По лемме Гейне-Бореля из $\{q_i\}$ можно выделить конечное число интервалов $\{q_{i_1},\dots,q_{i_n}\}$ таких, что $q\subset\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} q_{i_\nu}\Rightarrow$ (рис.1)* $m(q)<\sum\limits_{\nu=1}^{n} m(q_{i_\nu})=$
$=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(m(p_{i_\nu})+\frac{\varepsilon}{2^{i_\nu}}\right)\le\sum\limits_{\text{все } i}\left(m(p_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\le\sum m(p_i)+\varepsilon\Rightarrow m(q)\le$
$\le\sum m(p_i)$, т.к. взято $\forall\varepsilon>0\Rightarrow m(q)\le\inf\{\sum m(p_i)\mid\bigcup p_i\supset q\}=$
$=\mu q$. А т.к. $q\subset q$, то $\mu(q)\le m(q)$. Из этих двух неравенств следует равенство $\mu(q)=m(q)$, ч.т.д.

Для элементарного множества A доказательство формулы для μA проведем индукцией по n:

I) при $n=1$ утверждение уже доказано; берем $\forall n\in\mathbb{N}$ и предполагаем, что при $\forall k\in\mathbb{N}$ и $k<n$ формула доказана. Пусть $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$, $p_i=\langle a_i,b_i\rangle$, $a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le\dots\le b_n$, $p_i\cap p_j=\emptyset$ при $i\neq j$. Добавим отрезок $q=[b_{n-1},a_n]$ (рис.2). Тогда $p_{n-1}\cup q\cup p_n=p$ - промежуток и для $B=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-2} p_i\right)\cup p$ по предположению индукции $\mu B=\sum\limits_{i=1}^{n-2} m(p_i)+m(p)=\sum\limits_{i=1}^{n} m(p_i)+m(q)$. Но $B=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i\right)\cup q=$

---

* рисунки на стр.45

$= A \cup q \overset{\text{T.3}}{\Longrightarrow} \mu B \le \mu A + m(q) \Rightarrow$ (стр.6) $\sum_{i=1}^{n} m(p_i) + m(q) \le$
$\le \mu A + m(q) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m(p_i) \le \mu A$. С другой стороны, $\bigcup_{i=1}^{n} p_i \supset A \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu A \le \sum_{i=1}^{n} m(p_i)$. Из двух полученных неравенств следует равенство $\mu A = \sum_{i=1}^{n} m(p_i)$, ч. т. д.

Теорема 6. A и B – элементарные множества $\Rightarrow$

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B - \mu(A \cap B).$$

Доказательство проведем в три шага. 1-й шаг: $A \cap B = \varnothing$. Тогда, если $A = \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ и $B = \bigcup_{s=1}^{k} q_s$, то $A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} p_i\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{k} q_s\right)$ и промежутки $\{p_i, q_s\}$ попарно не пересекаются, т.к. $A \cap B = \varnothing \overset{\text{T.5}}{\Longrightarrow} \mu(A \cup B) =$
$= \sum_{i=1}^{n} m(p_i) + \sum_{s=1}^{k} m(q_s) = \mu A + \mu B$.
2-й шаг: $\mathcal{D} \subset H$ и множества элементарные $\Rightarrow \mu(H \setminus \mathcal{D}) = \mu H - \mu \mathcal{D}$.
Действительно, $H = \mathcal{D} \cup (H \setminus \mathcal{D})$ и $\mathcal{D} \cap (H \setminus \mathcal{D}) = \varnothing \Rightarrow$ (по I-му шагу, множество $H \setminus \mathcal{D}$ – элементарное) $\mu H = \mu \mathcal{D} + \mu(H \setminus \mathcal{D}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(H \setminus \mathcal{D}) = \mu H - \mu \mathcal{D}$.

3-й шаг – общий случай: $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ и $(B \setminus (A \cap B)) \cap$
$\cap A = \varnothing \Rightarrow$ (I-й шаг) $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu(B \setminus (A \cap B)) =$
$= \mu A + \mu B - \mu(A \cap B)$, т.к. $A \cap B \subset B$.

Теорема 7. Измеримое множество $A \subset p$, p – конечный промежуток $\Rightarrow p \setminus A$ измеримое множество.
Для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}_\varepsilon$ – элементарное множество такое, что $\mu^*(A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Множество $Q_\varepsilon = p \setminus \mathcal{P}_\varepsilon$ – элементарное и $Q_\varepsilon \triangle (p \setminus A) \overset{(*)}{\subset}$
$\subset A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \mu^*(Q_\varepsilon \triangle (p \setminus A)) \le \mu^*(A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$, ч. т. д.

(*) $(p \setminus A) \triangle (p \setminus \mathcal{P}_\varepsilon) = (p \cap (CA)) \triangle (p \cap (C\mathcal{P}_\varepsilon)) = ((p \cap (CA)) \cap$
$\cap C(p \cap (C\mathcal{P}_\varepsilon))) \cup ((C(p \cap (CA))) \cap (p \cap (C\mathcal{P}_\varepsilon))) = (p \cap (CA) \cap (Cp)) \cup$
$\cup (p \cap (CA) \cap \mathcal{P}_\varepsilon) \cup ((Cp) \cap p \cap (C\mathcal{P}_\varepsilon)) \cup (A \cap p \cap (C\mathcal{P}_\varepsilon)) \subset (\mathcal{P}_\varepsilon \setminus A) \cup$
$\cup (A \setminus \mathcal{P}_\varepsilon) = A \triangle \mathcal{P}_\varepsilon$, т.к. $p \cap (Cp) = \varnothing$.

Теорема 8. $\forall A_i$ измеримо $\Rightarrow$ измеримы $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ при $\forall n$.

Доказательство начнем со случая $n=2$. Для $\forall \varepsilon>0$ $\exists \mathcal{P}_i$ - элементарные множества ($i=1,2$) такие, что $\mu^*(A_i \triangle \mathcal{P}_i)<\frac{\varepsilon}{2}$. Т.к. $(A_1\cup A_2)\triangle(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\subset(A_1\triangle\mathcal{P}_1)\cup(A_2\triangle\mathcal{P}_2)\Rightarrow\mu^*((A_1\cup A_2)\triangle(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2))\overset{T.2,3}{\leq}$
$\leq\mu^*(A_1\triangle\mathcal{P}_1)+\mu^*(A_2\triangle\mathcal{P}_2)<\varepsilon$ и $\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ элементарное множество$\Rightarrow$ множество $A_1\cup A_2$ измеримо. Отсюда (индукция по n) следует измеримость $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ при $\forall n$. Все $A_i\subset\Pi$ (стр. 4). $\Pi\setminus A_i=$
$=CA_i$ измеримо по Т.7 при $\forall i\Rightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=C\left(C\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)\right)=C\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(CA_i)\right)$ измеримо (стр. 7).

Теорема 9. A и B измеримы $\Rightarrow$ измеримы $A\setminus B$ и $A\triangle B$. Поскольку $CB=\Pi\setminus B$ измеримо, то измеримо $A\setminus B=A\cap(CB)$. Следовательно, измеримо и $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Теорема 10(конечная аддитивность меры). Измеримо $\forall A_i$,

$$A_i\cap A_j=\varnothing \text{ при } i\neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu A_i. \qquad (4)$$

Для доказательства нам потребуется формула

$$|\mu^*A-\mu^*B|\leq\mu^*(A\triangle B) \text{ при } \forall A \text{ и } B. \qquad (5)$$

Действительно, $A\subset B\cup(A\triangle B)\Rightarrow\mu^*A\overset{T.2,3}{\leq}\mu^*B+\mu^*(A\triangle B)\Rightarrow$
$\Rightarrow\mu^*A-\mu^*B\leq\mu^*(A\triangle B)$. Аналогично получаем $\mu^*B-\mu^*A\leq$
$\leq\mu^*(A\triangle B)$. Из этих двух неравенств следует (5).

Доказательство равенства (4) начнем со случая $n=2$. Оценим

$$r=\mu(A_1\cup A_2)-\mu A_1-\mu A_2. \qquad (6)$$

Для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\mathcal{P}_i$ - элементарные множества ($i=1,2$) такие, что $\mu(A_i\triangle\mathcal{P}_i)<\frac{\varepsilon}{6}$ ($i=1,2$). По Т.6 $0=\mu(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)-\mu\mathcal{P}_1-\mu\mathcal{P}_2+$
$+\mu(\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2)$. Вычитая это равенство почленно из (6), получаем

$$|r|\leq|\mu(A_1\cup A_2)-\mu(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)|+|\mu A_1-\mu\mathcal{P}_1|+|\mu A_2-\mu\mathcal{P}_2|+\mu(\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2), \qquad (7)$$

где
$$|\mu A_i - \mu \mathcal{P}_i| < \frac{\varepsilon}{6},\ i=1,2, \qquad (8)$$
по выбору $\mathcal{P}_i$ и неравенству (5). А т.к. $(A_1\cup A_2)\Delta(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\subset$ $\subset(A_1\Delta\mathcal{P}_1)\cup(A_2\Delta\mathcal{P}_2)\Rightarrow\mu\big((A_1\cup A_2)\Delta(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\big)\leq\mu(A_1\Delta\mathcal{P}_1)+\mu(A_2\Delta\mathcal{P}_2)<\frac{\varepsilon}{3}$

и потому
$$\big|\mu(A_1\cup A_2)-\mu(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\big|\overset{(5)}{\leq}\mu\big((A_1\cup A_2)\Delta(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\big)<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (9)$$
Поскольку $A_1\cap A_2=\varnothing$, то $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\subset(A_1\Delta\mathcal{P}_1)\cup(A_2\Delta\mathcal{P}_2)\Rightarrow\mu(\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2)\leq$ $\leq\mu(A_1\Delta\mathcal{P}_1)+\mu(A_2\Delta\mathcal{P}_2)<\frac{\varepsilon}{3}$. Подставляя эту оценку, (9) и (8) в (7), получаем $|z|<\varepsilon\Rightarrow z=0$, т.к. взято $\forall\varepsilon>0$. Этим (4) доказано при $n=2$. Отсюда следует доказательство Т.10 при $\forall n$ по индукции.

Теорема 11 (σ-аддитивность меры). Измеримо $\forall A_i$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j\Rightarrow$ измеримо $\cup A_i$ и
$$\mu(\cup A_i)=\sum\mu A_i. \qquad (10)$$
Положим $A=\cup A_i\Rightarrow A\supset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ при $\forall n\Rightarrow\mu^*A\overset{T.2}{\geqslant}\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)\overset{T.10}{=}\sum_{i=1}^{n}\mu A_i$ при $\forall n\Rightarrow$ сходится $\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i\leq\mu^*A$. Но по Т.3 $\mu^*A\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i$

и потому
$$\mu^*A=\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i. \qquad (11)$$
Докажем измеримость A. Из (11) $\Rightarrow$ для $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in N$ такое, что
$$\sum_{i>n}\mu A_i<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (12)$$
Положим $B=\bigcup_{i\leq n}A_i$ и $\mathcal{D}=\bigcup_{i>n}A_i\Rightarrow A=B\cup\mathcal{D}$. По Т.3
$$\mu^*\mathcal{D}\leq\sum_{i>n}\mu A_i<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (13)$$
а B измеримо по Т.8 $\Rightarrow\exists\mathcal{P}_\varepsilon$ – элементарное множество такое, что
$$\mu(B\Delta\mathcal{P}_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (14)$$
Тогда $A\Delta\mathcal{P}_\varepsilon=(B\cup\mathcal{D})\Delta(\mathcal{P}_\varepsilon\cup\varnothing)\subset(B\Delta\mathcal{P}_\varepsilon)\cup(\mathcal{D}\Delta\varnothing)=(B\Delta\mathcal{P}_\varepsilon)\cup\mathcal{D}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(A\Delta \mathcal{D}_\varepsilon) \le \mu^*(B\Delta \mathcal{D}_\varepsilon,\ \mu^*\mathcal{D} < \varepsilon$ по (I4) и (I3). Измеримость A доказана. Тогда из (11) следует (I0). Теорема II доказана.

Замечание. В теоремах I0 и II условие $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \ne j$ можно заменить на условие $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ при $i \ne j$. Действительно, при любых измеримых множествах A и B верно равенство $\mu(A\cup B) = \mu A + \mu B - \mu(A\cap B) \Rightarrow$ (при $\mu(A\cap B) = 0$) $\mu(A\cup B) = \mu A + \mu B$ (доказательство дословно повторяет шаги 2 и 3 в доказательстве Т.6). Отсюда следует замечание (для Т.I0 – по индукции, для Т.II доказательство сохраняется без изменений). Теоремы I0 и II с условием $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ при $i \ne j$ называют усиленной конечной аддитивностью (соответственно – σ-аддитивностью).

Теорема I2. Измеримо $\forall A_i \Rightarrow$ измеримы $\cup A_i$ и $\cap A_i$.

Положим $B_1 = A_1$ и $B_i = A_i \setminus (\bigcup_{s<i} A_s)$ при $i > 1$. Тогда I) $A = \cup A_i = \cup B_i$ и 2) $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \ne j$. По Т.9 и I0 измеримо $\forall B_i \overset{\text{Т.11}}{\Longrightarrow}$ измеримо A. Т.к. CA_i измеримо при $\forall i$, то измеримо $C(\cup(CA_i)) = C(C(\cap A_i)) = \cap A_i$.

Докажем утверждение I: $B_1 \cup B_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) = A_1 \cup (A_2 \cap (CA_1)) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup (CA_1)) = (A_1 \cup A_2) \cap \Pi = A_1 \cup A_2$. Далее доказательство идет по индукции: берем $\forall n \in N$ и предполагаем, что равенство $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ доказано, тогда $\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cup B_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup (A_{n+1} \setminus (\bigcup_{s\le n} A_s)) = (\bigcup_{i\le n} A_i) \cup (A_{n+1} \cap (C(\bigcup_{s\le n} A_s))) = ((\bigcup_{i\le n} A_i) \cup A_{n+1}) \cap ((\bigcup_{i\le n} A_i) \cup (C(\bigcup_{i\le n} A_i))) = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$. Этим доказано, что $\bigcup_{i\le n} B_i = \bigcup_{i\le n} A_i$ при $\forall n$. Т.к. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ при $\forall n$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. С другой стороны, $\forall B_i \subset A_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Из полученных включений следует равенство $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Докажем утверждение 2: пусть $i > j$, тогда $i-1 \ge j$ и $B_i \cap B_j = A_i \cap (C(\bigcup_{s<i} A_s)) \cap B_j \subset (\bigcap_{s\le i-1} (CA_s)) \cap A_j \subset (CA_j) \cap A_j = \varnothing$.

<u>Теорема 13</u>. Множество A измеримо и $\mu(A\Delta B)=0 \Rightarrow B$ измеримо и $\mu B=\mu A$.

Множество $B=(A\setminus(A\setminus B))\cup(B\setminus A)$. Т.к. $A\setminus B\subset A\Delta B$, то $\mu(A\setminus B)=0$ $\overset{T.9}{\Rightarrow} A\setminus(A\setminus B)$ измеримо и $\mu(A\setminus(A\setminus B))=\mu A$ по Т.4; $B\setminus A\subset$ $\subset A\Delta B \Rightarrow \mu(B\setminus A)=0 \overset{T.8,4}{\Rightarrow} B$ измеримо и $\mu B=\mu(A\setminus(A\setminus B))=\mu A$.

Обобщением интервала является открытое множество. Множество G открыто $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x\in G\ \exists\, \mathcal{U}$ (окрестность точки x) такая, что $\mathcal{U}\subset G$. Следующая теорема – о строении и измеримости открытых множеств.

<u>Теорема 14</u>.*) 1. Множество G открыто $\Leftrightarrow G=\bigcup(a_i, b_i)$, где $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$ при $i\neq j$ и a_i и $b_i\notin G$. 2. Открытое множество G измеримо и $\mu G=\sum(b_i-a_i)$.

Интервалы (a_i, b_i) называют составляющие G интервалы.
Т.к. интервал – измеримое множество, то из 1 $\Rightarrow G$ измеримо; т.к. $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$ при $i\neq j$, то по Т.11 $\mu G=\sum(b_i-a_i)$.
Докажем теперь утверждение 1.

($\Leftarrow$) для $\forall x\in G\ \exists (a_i, b_i)\ni x$, этот интервал – окрестность $\mathcal{U}$ точки x и $\mathcal{U}\subset G\Rightarrow G$ открыто.

($\Rightarrow$) для $\forall x\in G\ \exists\,\mathcal{U}$ (окрестность x), $\mathcal{U}\subset G$, $\mathcal{U}=(\alpha(x),\beta(x))$. Множество $\{\alpha(x)\}$ – левых концов интервалов $(\alpha(x),\beta(x))\subset G$ и $x\in$ $\in(\alpha(x),\beta(x))$ не пусто и ограничено сверху, т.к. $G\subset\Pi\Rightarrow\exists a(x)=$ $=\inf\{\alpha(x)\,|\,\alpha(x)<x<\beta(x)$ и $(\alpha(x),\beta(x))\subset G\}$. Покажем, что $a(x)\notin$ $\notin G$. Предположим, что $a(x)\in G\Rightarrow\exists\,\mathcal{U}=(p,q)$ – окрестность $a(x)$ такая, что $\mathcal{U}\subset G\Rightarrow\exists\,\alpha(x)\in(a(x),q)$ (рис.3) $\Rightarrow(p,\beta(x))\subset G$ и $p<x<\beta(x)$, т.е. $(p,\beta(x))$ – окрестность x, входящая в G и $p<a(x)$, что противоречит определению $a(x)$. Аналогично показывается, что $\exists\, b(x)=\sup\{\beta(x)\,|\,\alpha(x)<x<\beta(x)$ и $(\alpha(x),\beta(x))\subset G\}$ и $b(x)\notin G$. Покажем, что $(a(x),b(x))\subset G$. Для $\forall y\in(a(x),b(x))$

*) Открытое мн-во G измеримо. Положим $\mathfrak{A}=\{(k,n)\,|\,k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$ и $\Delta_{kn}=$ $=[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset G\}$. Тогда $G=\bigcup\limits_{(k,n)\in\mathfrak{A}}\Delta_{kn}\xRightarrow[T.5]{T.12}$ Т.14

в силу определения $a(x)$ и $b(x)$ $\exists \alpha(x)\in(a(x),y)$ и $\exists \beta(x)\in(y,b(x))$ такие, что $(\alpha(x),\beta(x))\subset G \Rightarrow y\in G \Rightarrow (a(x),b(x))\subset G$.

Остается доказать, что при x и $y\in G$, $x\neq y$, или $(a(x),b(x))=$ $=(a(y),b(y))$, или $(a(x),b(x))\cap(a(y),b(y))=\varnothing$. Действительно, или 1). $a(x)=a(y)$, или 2). $a(x)\neq a(y)$. Случай 1. $\Leftrightarrow b(x)=$ $=b(y)$ (в противном случае или $b(x)<b(y)$ и $(a(y),b(y))\subset G \Rightarrow$ $b(x)\in G \Rightarrow$ противоречие, или $b(x)>b(y)\Rightarrow b(y)\in G \Rightarrow$ противоречие) и тогда $(a(x),b(x))=(a(y),b(y))$. Случай 2. $\Leftrightarrow b(x)\neq b(y)$ по доказанному выше $\Rightarrow$ или $b(x)>b(y)$ и тогда $a(x)\geqslant b(y)$ (если $a(x)<b(y)$, то $b(y)\in(a(x),b(x))\subset G \Rightarrow b(y)\in G \Rightarrow$ противоречие) $\Rightarrow (a(x),b(x))\cap(a(y),b(y))=\varnothing$, или $b(x)<b(y)\Rightarrow b(x)\leqslant a(y)$ (как и выше) $\Rightarrow (a(x),b(x))\cap(a(y),b(y))=\varnothing$. Возьмем в каждом интервале, составляющем G, по рациональной точке. Различным таким интервалам будут соответствовать разные рациональные точки. Следовательно, множество интервалов, составляющих G, не более чем счетно и потому их можно перенумеровать. Поскольку для $\forall x\in G\ \exists (a_i,b_i)\ni x$, $(a_i,b_i)\subset G$ и $\{a_i,b_i\}\not\subset G$, то $\bigcup(a_i,b_i)=$ $=G$.

2. Обобщения. Если множество $A\subset\mathbb{R}$ неограничено, то:

1) A измеримо $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ измеримо $A\cap[k,k+1)$ при $\forall k\in\mathbb{Z}$;

2) для измеримого множества A его мера $\mu A \overset{def}{=} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mu(A\cap[k,k+1))$.

Т.о., для неограниченного множества или $\mu A<\infty$, или $\mu A=\infty$.

Упражнение 1. Проверить, что для неограниченных множеств сохраняются теоремы из п.1.

В плоскости $\mathbb{R}^2$ прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, будем обозначать p. Стороны p или целиком принадлежат p, или не принадлежат p, или p принадлежит только некоторое множество точек на сторонах p. Во всех случаях положим площадь p - число $m_2(p)=h\ell$, где h - высота и ℓ - ширина p (рис.4).

Упражнение 2. Проверить, что все написанное в п.I сохраняется и для множеств в $\mathbb{R}^2$. Указание: I) для прямоугольника $p=\bigcup_{i=1}^{n} p_i$ (рис.5) возможно $p_i\cap p_{i+1}\neq\varnothing$) $m_2(p)=\sum_{i=1}^{n} m_2(p_i)$; 2) повторить без изменения (из п.I) определения внешней меры, измеримости и меры множества $A\subset\mathbb{R}^2$; меру множества $A\subset\mathbb{R}^2$ обозначают $\mu_2 A$ и называют двумерной мерой множества; 3) проверить, что сохраняются теоремы из п.I без изменения их формулировок и доказательств.

Пример 5. Множество $A\subset Ox$ и $\mu A<\infty$, $C\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow$ прямое произведение $A\times[0,C]$ - измеримое множество и $\mu_2(A\times[0,C])=C\mu A$. Доказательство проведем в три шага. I-й шаг: A - элементарное множество, т.е. $A=\bigcup_{i=1}^{n} p_i$, $\forall p_i$ - промежуток оси Ox и $p_i\cap p_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $\Rightarrow B=A\times[0,C]=\bigcup_{i=1}^{n}(p_i\times[0,C])=\bigcup_{i=1}^{n} q_i$ и $\forall q_i$ - прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с площадью $m_2(q_i)=C\,m(p_i)$; из $i\neq j \Rightarrow q_i\cap q_j=(p_i\cap p_j)\times$ $\times[0,C]=\varnothing \Rightarrow B$ - элементарное множество в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mu_2 B=\sum_{i=1}^{n} m_2(q_i)=$ $=\sum_{i=1}^{n} C\,m(p_i)=C\sum_{i=1}^{n} m(p_i)=C\mu A$.

2-й шаг: множество A измеримо и ограничено $\Rightarrow$ для $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{P}$ - элементарное множество на оси Ox такое, что

$$\mu(A\triangle\mathcal{P})<\frac{\varepsilon}{2C}\,, \qquad (\alpha)$$

и потому $\exists \bigcup p_j\supset A\triangle\mathcal{P}$, $\forall p_j$ - промежуток оси Ox и

$$\sum m(p_j)<\frac{\varepsilon}{2C}\,. \qquad (\beta)$$

Положим $J=[0,C]$. Тогда $(A\times J)\triangle(\mathcal{P}\times J)\subset\bigcup(p_j\times J)$ и

$$\mu_2^*\big((A\times J)\triangle(\mathcal{P}\times J)\big)\leq\sum m_2(p_j\times J)=\sum C\,m(p_j)\overset{(\beta)}{<}\frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (\gamma)$$

Поскольку $\mathcal{P}\times J$ - элементарное множество в $\mathbb{R}^2$, то $A\times J$ измеримо и

$$|\mu_2(A\times J)-C\mu A|\leq|\mu_2(A\times J)-\mu_2(\mathcal{P}\times J)|+|\mu_2(\mathcal{P}\times J)-C\mu A|\underset{\text{шаг I}}{\overset{(5)}{\leq}}$$

$$\le \mu_2\big((A\times J)\Delta(P\times J)\big)+|C\mu P-C\mu A|\overset{(\gamma)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+C\mu(P\Delta A)\overset{(\alpha)}{<}\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu_2(A\times J)=C\mu A$, т.к. взято $\forall\varepsilon>0$.

3-й шаг: множество A неограничено. Тогда $\mu A=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mu(A\cap[k,k+1))$.

Прямое произведение $A\times J=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}((A\cap[k,k+1))\times J)$, причем (см.шаг 2) существует $\mu_2((A\cap[k,k+1))\times J)=C\mu(A\cap[k,k+1))$ при $\forall k\in\mathbb{Z}\Rightarrow A\times J$ - измеримо. Т.к. из $k\ne\ell\Rightarrow((A\cap[k,k+1))\times J)\cap$ $\cap((A\cap[\ell,\ell+1))\times J)=\varnothing$, то по σ- аддитивности меры

$$\mu_2(A\times J)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_2((A\cap[k,k+1))\times J)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}C\mu(A\cap[k,k+1))=C\mu A, \text{ г.т.д.}$$

Упражнение 3. Доказать: I) множество $A\subset Ox\Rightarrow\mu_2A=0$; 2) множества A и B в $\mathbb{R}^2$ и симметричны относительно оси $Ox\Rightarrow$ (A измеримо $\Leftrightarrow B$ измеримо, при этом $\mu_2A=\mu_2B$); 3) промежуток $p\subset Oy$, измеримое множество $A\subset Ox\Rightarrow\exists\mu_2(A\times p)=m(p)\cdot\mu A$; 4) измеримые множества $A\subset Ox$ и $B\subset Oy\Rightarrow\exists\mu_2(A\times B)=\mu A\cdot\mu B$.

Упражнение 4. Для множеств в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^n$ повторить упражнение 2, отправляясь от брусов в $\mathbb{R}^n$ - множеств $p=\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,a_i\le$ $\le x_i\le b_i,\ i=1,2,\dots,n\}$; точки, для которых $x_i=a_i$ (или $x_i=b_i$) при некоторых i образуют границу p, часть из них может не принадлежать p; положим n-мерный объем p - число

$$m_n(p)\overset{def}{=}(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

Если множество $A\subset\mathbb{R}^n$ неограничено, то I) A измеримо $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ измеримо $A\cap K_\ell$ при $\forall\ell\in N$, где $K_\ell=\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,|x_i|\le\ell,\ i=1,2,\dots,n\}$; 2) n-мерная мера A есть число $\mu_nA\overset{def}{=}\sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\mu_n(A\cap(K_\ell\setminus K_{\ell-1}))$, где $K_0=\varnothing$.

§ 2. Измеримые функции

До сих пор вы знали функции непрерывные и дифференцируемые (на интервале, например). Добавим к ним еще функции измеримые на множестве. Функция $f: A \to \mathbb{R}$ измерима на множестве $A \subset \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ множество A измеримо и множество $\{x \mid x \in A$ и $f(x) < C\}$ измеримо при $\forall C \in \mathbb{R}$.

Пример I. $f \in C(a,b) \Rightarrow f$ измерима на (a,b). Надо доказать, что при $\forall C \in \mathbb{R}$ измеримо множество $G = \{x \mid x \in (a,b)$ и $f(x) < C\}$. Для этого достаточно доказать, что G открыто. Для $\forall x_0 \in G \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_0) < C \Rightarrow (f \in C(a,b))\ \exists \mathcal{U}$ (окрестность x_0) такая, что $\mathcal{U} \subset$ $\subset (a,b)$ и при $\forall x \in \mathcal{U} \Rightarrow f(x) < C \Rightarrow \mathcal{U} \subset G \Rightarrow G$ – открытое множество.

Теорема I. Функция f измерима на $A \Rightarrow$ при $\forall C \in \mathbb{R}$ измеримы множества $\{x \mid x \in A$ и $f(x) \le C\}$, $\{x \mid x \in A$ и $f(x) > C\}$ и т.п., $\{x \mid x \in A$ и $f(x) \in p$ - промежуток$\}$.

Действительно, множество $\{x \mid x \in A$ и $f(x) \le C\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \in A$ и $f(x) < C + \frac{1}{n}\}$ и потому измеримо (I.I2, §I). Аналогично разбираются и остальные случаи.

Упражнение I. Доказать: функция $f \in C(p)$, p – промежуток $\Rightarrow$ f измерима на p.

Теорема 2. Функция f измерима на A, промежуток $p \supset E(f)$, $\varphi \in C(p) \Rightarrow \varphi \circ f$ измерима на A.

Для $\forall C \in \mathbb{R}$ множество $G = \{t \mid t \in p$ и $\varphi(t) < C\}$ открыто $\Rightarrow G = \bigcup J_s$, $\forall J_s$ – интервал, составляющий G, $\Rightarrow \{x \mid x \in A$ и $\varphi(f(x)) < C\} =$ $= \bigcup \{x \mid x \in A$ и $f(x) \in J_s\}$ и потому измеримо $\Rightarrow \varphi \circ f$ измерима на A.

Следствие. Функция f измерима на $A \Rightarrow$ на A измеримы следующие функции $kf + b$, $|f|$, f^2, $\frac{1}{f}$ при $f \ne 0$ на A.

Теорема 3. Функции f и g измеримы на $A \Rightarrow$ I) измеримо множество $\{x \mid x \in A$ и $f(x) < g(x)\}$, 2) на A измеримы функции $f \pm g$, fg и f/g, если $g \ne 0$ на A

Для доказательства I перенумеруем все рациональные числа:

$Q=\{r_k\}$. Тогда $\{x \mid x\in A$ и $f(x)<g(x)\}=\bigcup\left(\{x\mid x\in A \text{ и } f(x)<r_k\}\cap\right.$ $\left.\cap\{x\mid x\in A \text{ и } g(x)>r_k\}\right)$ измеримо. Докажем 2, для $\forall C\in\mathbb{R}$ измерима на A функция $C-g$ (по следствию) $\Rightarrow$ измеримо множество $\{x\mid x\in A$ и $f(x)<C-g(x)\}=\{x\mid x\in A$ и $f(x)+g(x)<C\}\Rightarrow$ $f+g$ измерима на A. Измеримость $f-g$ доказывается аналогично. Поскольку $fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$, то в силу измеримости $(f\pm g)^2$ и уже доказанного, измерима fg. Т.к. $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ измерима в силу уже доказанного.

Говорят: утверждение ω выполнено почти всюду (п.в.) на множестве $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B\subset A$ такое, что $\mu(A\setminus B)=0$ и ω выполнено на B.

Пример 2. $x^n\to 0$ п.в. на $[-1;1]$, т.к. $x^n\to 0$ на $(-1;1)\subset$ $\subset[-1;1]$ и $[-1;1]\setminus(-1;1)=\{1;-1\}$, а $\mu\{1;-1\}=0$.

Теорема 4. Функция f измерима на A, функция $g: A\to\mathbb{R}$ и $g=f$ п.в. на $A \Rightarrow g$ измерима на A.

Функция $g=f$ на множестве $B\subset A$ и $\mu(A\setminus B)=0\Rightarrow$ множество $D=\{x\mid x\in A$ и $f(x)<C\}\Delta\{x\mid x\in A$ и $g(x)<C\}\subset A\setminus B\Rightarrow\mu D=0\Rightarrow$ (Т.13, §1) множество $\{x\mid x\in A$ и $g(x)<C\}$ измеримо при $\forall C\in\mathbb{R}$, ч.т.д.

Теорема 5. Функция f_n измерима на A при $\forall n$, $f_n\to f$ п.в. на $A\Rightarrow f$ измерима на A.

На множестве $B\subset A$ последовательность $f_n\to f$ и $\mu(A\setminus B)=0$.

Множество $H=\{x\mid x\in B$ и $f(x)<C\}\overset{(*)}{=}\bigcup\limits_{k}\bigcup\limits_{m}\bigcap\limits_{n>m}\{x\mid x\in B$ и $f_n(x)<C-\frac{1}{k}\}=$ $=\mathcal{D}\Rightarrow H$ измеримо при $\forall C\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ измерима на B. Функция $g=$ $=f$ на B и $g=0$ на $A\setminus B$ измерима на A и $f=g$ п.в. на $A\Rightarrow$ f измерима на A.

$(*)\ \forall x\in H\Leftrightarrow\left(C>f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{N}\,\exists m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,(n>m\Rightarrow\right.$

$\Rightarrow f_n(x) < C - \frac{1}{k})) \Longleftrightarrow x \in \mathcal{D}$.

Упражнение 2. Проверить, что всё, написанное в §2, сохраняется без изменений в $\mathbb{R}^n$.

§ 3. Интеграл Лебега

В этом параграфе предполагается, что на плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$ определена двумерная мера μ_2, а на осях координат – одномерная мера μ. На множестве $A \subset Ox$ определена функция $f: A \to \mathbb{R}$ и она измерима на A (по мере μ). На плоскости $\mathbb{R}^2$ определяются множества $\Pi_+(A,f) = \{(x,y) | x \in A \text{ и } 0 \le y \le f(x)\}$ и $\Pi_-(A,f) = \{(x,y) | x \in A \text{ и } f(x) \le y \le 0\}$. Функция f интегрируема по Лебегу на $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Pi_+(A,f)$ и $\Pi_-(A,f)$ измеримы и $\mu_2\Pi_\pm(A,f) < \infty$. Интегралом Лебега функции f по множеству A называют число

$$\underline{\int_A f(x)\,d\mu = \mu_2\Pi_+(A,f) - \mu_2\Pi_-(A,f).} \qquad (1)$$

Далее мы будем говорить коротко "интеграл от f по A" и, если это не приводит к неоднозначности в понимании, – писать $\int_A f$. Если $A = \langle a,b \rangle$, то пишут $\int_a^b f$. Принята также запись $\int_A f(x)\,dx$.

Теорема I. Множество $A \subset Ox$ и $\mu A < \infty$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \int_A C\,d\mu = C\mu A$.

Доказательство начнем со случая $C > 0$. Тогда $\Pi_-(A,C) = \varnothing \Rightarrow \mu_2\Pi_-(A,C) = 0$, $\Pi_+(A,C) = A \times [0,C] \Rightarrow \exists \mu_2\Pi_+(A,C) = C\mu A$. Следовательно, существует $\int_A C\,d\mu = C\mu A - 0 = C\mu A$. Если $C = 0$, то $Ox \supset \Pi_\pm(A,0) \Rightarrow \mu_2\Pi_\pm(A,0) = 0 \Rightarrow \exists \int_A 0\,d\mu = 0$. Если $C < 0$, то множество $\Pi_+(A,C) = \varnothing$ и $\mu_2\Pi_+(A,C) = 0$; множества $\Pi_-(A,C)$ и $\Pi_+(A,-C) = A \times [0,-C]$ симметричны относительно оси Ox и (т.к. $-C > 0$, пример 5, §1) $\exists \mu_2\Pi_+(A,-C) = -C\mu A \Rightarrow \exists \mu_2\Pi_-(A,C) = -C\mu A$. Следовательно, существует $\int_A C\,d\mu = 0 - (-C\mu A) = C\mu A$. Все случаи рассмотрены. Теорема I полностью доказана.

Теорема 4. Измеримое множество $B\subset A$ и $\exists\int_A f \Rightarrow \exists\int_B f$.

Множество $B_n = B\times[0,n]$ измеримо при $\forall n\in\mathbb{N}$ (пример 5, §1) $\Rightarrow$ измеримы $\Pi_+(A,f)\cap B_n$ при $\forall n \Rightarrow$ измеримо $\cup(\Pi_+(A,f)\cap B_n) = \Pi_+(A,f)\cap(\cup B_n) = \{(x,y)\,|\,x\in A \text{ и } 0\le y\le f(x)\}\cap\{(x,y)\,|\,x\in B \text{ и } y\ge 0\} = \{(x,y)\,|\,x\in B \text{ и } 0\le y\le f(x)\} = \Pi_+(B,f)$, а т.к. $B\subset A$, то $\Pi_+(B,f)\subset \Pi_+(A,f) \Rightarrow \mu_2\Pi_+(B,f)\le\mu_2\Pi_+(A,f)<\infty$. Аналогично доказывается, что $\exists\mu_2\Pi_-(B,f)<\infty$. Следовательно, $\exists\int_B f$.

Теорема 5. Функция f измерима на A. Тогда $\exists\int_A f \Leftrightarrow \exists\int_A |f|$ и $\left|\int_A f\right| \le \int_A |f|$.

($\Rightarrow$) $\Pi_-(A,|f|)\subset Ox \Rightarrow \exists\mu_2\Pi_-(A,|f|)=0$; $\Pi_+(A,|f|)=\Pi_+(A,f)\cup\Pi_+(A,-f)$ измеримо, т.к. измеримо $\Pi_+(A,f)$ и измеримо $\Pi_+(A,-f)$ как множество, симметричное относительно оси Ox с измеримым множеством $\Pi_-(A,f)$. Двумерные меры всех этих множеств конечны $\Rightarrow \exists\int_A |f|$. Поскольку $\mu_2(\Pi_+(A,f)\cap\Pi_+(A,-f))=0$ (пересечение этих множеств принадлежит оси Ox), то по усиленной аддитивности меры $\int_A |f| = \mu_2\Pi_+(A,|f|) = \mu_2\Pi_+(A,f)+\mu_2\Pi_+(A,-f) = \mu_2\Pi_+(A,f)+\mu_2\Pi_-(A,f) \ge |\mu_2\Pi_+(A,f)-\mu_2\Pi_-(A,f)| = \left|\int_A f\right|$.

($\Leftarrow$) Функция f измерима на $A \Rightarrow$ измеримы множества $A_+ = \{x\,|\,x\in A \text{ и } f(x)\ge 0\}$ и $A_- = \{x\,|\,x\in A \text{ и } f(x)\le 0\}$. $\exists\int_A |f|$ и измеримое множество $A_+\subset A \overset{\text{Т.4}}{\Rightarrow} \exists\int_{A_+}|f| \Rightarrow \exists\mu_2\Pi_+(A_+,|f|)<\infty \Rightarrow$, (т.к. $\Pi_+(A_+,|f|)=\Pi_+(A_+,f)=\Pi_+(A,f)$) $\exists\mu_2\Pi_+(A,f)<\infty$. Измеримое множество $A_-\subset A$ и $\exists\int_A |f| \Rightarrow \exists\int_{A_-}|f| \Rightarrow \exists\mu_2\Pi_+(A_-,|f|)<\infty \Rightarrow$, (т.к. измеримое множество $\Pi_+(A_-,|f|)=\Pi_+(A_-,-f)=\Pi_+(A,-f)$ симметрично относительно оси Ox с множеством $\Pi_-(A,f)$) $\exists\mu_2\Pi_-(A,f)=\mu_2\Pi_+(A_-,|f|)<\infty$. Этим доказано $\exists\int_A f$.

Теорема 4. Функция $g: A\to\mathbb{R}$, $g=f$ п.в. на A и $\exists\int_A f \Rightarrow$

$\exists\int_A g=\int_A f$.

Пусть $g=f$ на $B\subset A$ и $\mu(A\setminus B)=0$. Множество $\mathcal{D}=\Pi_+(A,f)\Delta\Pi_+(A,g)\subset$
$\subset(A\setminus B)\times\mathbb{R}$. Т.к. $\mu_2((A\setminus B)\times[n,n+1))=1\cdot\mu(A\setminus B)=0$ (§I, упр.3)
при $\forall n\in\mathbb{Z}$, то $\mu_2\mathcal{D}\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu_2((A\setminus B)\times[n,n+1))\Rightarrow\mu_2\mathcal{D}=0\Rightarrow$ (§1, Т.13)
$\exists\mu_2\Pi_+(A,g)=\mu_2\Pi_+(A,f)<\infty$, (т.к. $\exists\int_A f$). Аналогично доказывается, что $\exists\mu_2\Pi_-(A,g)=\mu_2\Pi_-(A,f)<\infty$. Следовательно, $\exists\int_A g=$
$=\mu_2\Pi_+(A,g)-\mu_2\Pi_-(A,g)=\mu_2\Pi_+(A,f)-\mu_2\Pi_-(A,f)=\int_A f$.

Следствие. $\mu A=0\Rightarrow\int_A f=0$, т.к. $f=0$ п.в. на A и $\int_A 0\,d\mu=0$ по Т.1.

Пример I. Функция Дирихле $f=0$ на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ и $f=1$ на $\mathbb{Q}$, $\mu A<$
$<\infty\Rightarrow\exists\int_A f=0$, т.к. $f=0$ п.в. на A.

Пример 2. Функция $f=0$ на $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\}$ и при взаимно простых m и $n\in\mathbb{N}$ $f(\pm\frac{m}{n})=n$, $\mu A<\infty\Rightarrow\int_A f=0$, т.к. $f=0$ п.в. на A.
Отметим, что эта функция f неограничена на любом интервале.

Теорема 5. $\exists\int_A f$, $\exists\int_A g$ и $f\le g$ п.в. на $A\Rightarrow\int_A f\le\int_A g$.

В силу Т.4 доказательство достаточно провести для случая $f\le g$ всюду на A. Тогда 1) $\Pi_+(A,f)\subset\Pi_+(A,g)\Rightarrow\mu_2\Pi_+(A,f)\le\mu_2\Pi_+(A,g)$;
2) $\Pi_-(A,f)\supset\Pi_-(A,g)\Rightarrow\mu_2\Pi_-(A,f)\ge\mu_2\Pi_-(A,g)$. Из 1 и 2 $\Rightarrow$
$\int_A f=\mu_2\Pi_+(A,f)-\mu_2\Pi_-(A,f)\le\mu_2\Pi_+(A,g)-\mu_2\Pi_-(A,g)=\int_A g$.

Следующие две теоремы о σ-аддитивности интеграла Лебега.

Теорема 6. 1) $A=\cup A_i$; 2) $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\ne j$; 3) функция f измерима на A; 4) сходится $\sum\int_{A_i}|f|\Rightarrow$

$$\exists\int_A f=\sum\int_{A_i} f, \text{ ряд сходится абсолютно.} \qquad (2)$$

Из 4 $\Rightarrow\exists\int_{A_i}|f|$ при $\forall i\Rightarrow\forall A_i$ измеримо, $\Pi_\pm(A_i,f)$ измеримы и $\mu_2\Pi_\pm(A_i,f)\le\int_{A_i}|f|$ при $\forall i\Rightarrow$ измеримы $\cup\Pi_\pm(A_i,f)=\Pi_\pm(A,f)$

(условие I и Т.3, §I) $\mu_2\Pi_\pm(A,f)\leq\sum\mu_2\Pi_\pm(A_i,f)\leq$ $\leq\sum\int_{A_i}|f|<\infty\Rightarrow\exists\int_A f$. При $i\neq j$ из условия 2 $\Rightarrow\Pi_\pm(A_i,f)\cap\cap\Pi_\pm(A_j,f)=\varnothing\overset{§1,\,Т.11}{\Longrightarrow}\mu_2\Pi_\pm(A,f)=\sum\mu_2\Pi_\pm(A_i,f)$ и $\underline{\text{абсолютная}}$ сходимость рядов, т.к. $\mu_2\Pi_\pm(A_i,f)\geq 0$ при $\forall i\Rightarrow\int_A f=\mu_2\Pi_+(A,f)-\mu_2\Pi_-(A,f)=$

$$=\sum\mu_2\Pi_+(A_i,f)-\sum\mu_2\Pi_-(A_i,f)=\sum\left(\mu_2\Pi_+(A_i,f)-\mu_2\Pi_-(A_i,f)\right)=\sum\int_{A_i}f,$$

сходимость рядов абсолютная как у разности абсолютно сходящихся рядов.

Замечание I. Если множеств A_i конечное число, то вместо условий 3 и 4 достаточно потребовать $\exists\int_{A_i}f$ при $\forall i$. Действительно, тогда f измерима на любом $A_i\Longrightarrow f$ измерима на A, $\exists\int_{A_i}|f|$ при $\forall i\Rightarrow\sum\int_{A_i}|f|<\infty$ (конечная сумма) $\Rightarrow$ условие 4 выполнено.

Пример 3. $f=2$ на A, $f=-5$ на B, $A\cap B=\varnothing$, $\mu A<\infty$ и $\mu B<\infty\Rightarrow\exists\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f=2\mu A-5\mu B$.

<u>Теорема 7</u>. I) $A=\cup A_i$; 2) $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$; 3) $\forall A_i$ измеримо; 4) $\exists\int_A f\Rightarrow(2)$.

Из 3 и 4 $\Rightarrow\exists\int_{A_i}f=\mu_2\Pi_+(A_i,f)-\mu_2\Pi_-(A_i,f)$ при $\forall i$; из 4 $\Rightarrow$

$$\int_A f=\mu_2\Pi_+(A,f)-\mu_2\Pi_-(A,f)\overset{(*)}{=}\sum\mu_2\Pi_+(A_i,f)-\sum\mu_2\Pi_-(A_i,f)=$$
$$=\sum\left(\mu_2\Pi_+(A_i,f)-\mu_2\Pi_-(A_i,f)\right)=\sum\int_{A_i}f.$$

(*) как и при доказательстве Т.6.

Замечание 2. В теоремах 6 и 7 условие 2 можно заменить на условие 2* $\mu(A_i\cap A_j)=0$ при $i\neq j$ в силу усиленной σ-аддитивности меры. В этом случае говорят об усиленной σ-аддитовности интеграла Лебега.

Наиболее просто доказываются теоремы для функций, множество значений которых не более чем счетно. Такие функции называют простыми и определяют так: функция $f=y_i\in\mathbb{R}$ на множестве A_i, $i\in N$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $\cup A_i=A$.

Теорема 8. Если $y_i\neq y_j$ при $i\neq j$, то простая функция измерима на множестве $A \Longleftrightarrow \forall A_i$ измеримо.

($\Rightarrow$) В условиях теоремы множество $A_i=\{x\,|\,x\in A$ и $f(x)=y_i\}$ измеримо при $\forall i$, т.к. f измерима на A.

($\Leftarrow$) Для $\forall C\in\mathbb{R}$ множество $\{x\,|\,x\in A$ и $f(x)<C\}=\bigcup\limits_{i\in n} A_i$ (n - множество тех i, для которых $y_i<C$) и потому измеримо(Т.12, .

Теорема 9. Функция f простая и измерима на A, тогда

$$\exists\int_A f \Leftrightarrow \sum|y_i|\mu A_i \text{ сходится, при этом } \int_A f=\sum y_i\mu A_i. \quad (3)$$

($\Rightarrow$) В этом случае выполнены условия Т.7 $\Rightarrow \int_A f=\sum\int_{A_i} f=$
$=\sum y_i\mu A_i$ и ряд сходится абсолютно $\Rightarrow \sum|y_i|\mu A_i<\infty$.

($\Leftarrow$) Сходится $\sum|y_i|\mu A_i=\sum\int_{A_i}|f| \overset{\text{Т.6}}{\Longrightarrow} (3)$.

Теорема 10. Функции f и g простые, $\exists\int_A f$, $\exists\int_A g$, α и $\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\exists\int_A(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_A f+\beta\int_A g.$$

Простая функция $g=z_l\in\mathbb{R}$ на B_l, $B_l\cap B_m=\varnothing$ при $l\neq m$, $A=\cup B_l$, $\exists\int_A g\Rightarrow g$ измерима на $A \Rightarrow \forall B_l$ измеримо и $\int_A g=$
$=\sum z_l\mu B_l$ (ряд сходится абсолютно). Об f см. Т.9. Тогда $\alpha f+\beta g=\alpha y_i+\beta z_l$ на $A_i\cap B_l$. Эти множества измеримы при $\forall(i,l)$. Если $(i,l)\neq(j,m)$, то $(A_i\cap B_l)\cap(A_j\cap B_m)=\varnothing$, (т.к. или $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$ или $l\neq m\Rightarrow B_l\cap B_m=\varnothing$); и
$\bigcup\limits_{i,l}(A_i\cap B_l)=\bigcup\limits_i(A_i\cap(\bigcup\limits_l B_l))=\bigcup\limits_i(A_i\cap A)=\bigcup\limits_i A_i=A$. Этим доказано, что $\alpha f+\beta g$ - простая функция, измеримая на A и

$$\alpha\int_A f+\beta\int_A g=\alpha\sum y_i\mu A_i+\beta\sum z_l\mu B_l\overset{(*)}{=}\alpha\sum_i y_i\sum_l\mu(A_i\cap B_l)+$$
$$+\sum_l z_l\sum_i\mu(A_i\cap B_l)=\sum_{i,l}(\alpha y_i+\beta z_l)\mu(A_i\cap B_l)\overset{(**)}{=}\int_A(\alpha f+\beta g).$$

(*) $\bigcup_{\ell}(A_i\cap B_\ell)=A_i\cap(\bigcup_{\ell}B_\ell)=A_i\cap A=A_i$ при $\forall i$, $(A_i\cap B_\ell)\cap(A_i\cap$ $\cap B_m)=\varnothing$ при $\ell\neq m\overset{\text{Т.11, §1}}{\Longrightarrow}\mu A_i=\sum_{\ell}\mu(A_i\cap B_\ell)$ при $\forall i$; аналогично $\mu B_\ell=\sum_{i}\mu(A_i\cap B_\ell)$ при $\forall \ell$;

(**) ряды слева сходятся абсолютно $\overset{\text{Т.9}}{\Longrightarrow}\exists\int_A(\alpha f+\beta g)$ и см. (3).

Замечание 3. Функции f и g простые (измеримые) на $A\Rightarrow$ функции fg и f/g, (если $g\neq 0$ на A) - простые (измеримые) на A. Доказательство повторяет рассуждения для $\alpha f+\beta g$ из доказательства теоремы 10.

Теорема 11 (признак Лебега существования интеграла). Функция f измерима на множестве A, $|f|\leq\varphi$ п.в. на A и $\exists\int_A\varphi\Rightarrow\exists\int_A f$.

Доказательство начнем со случая $\mu A<\infty$. $\Pi_-(A,|f|)\subset Ox\Rightarrow$ $\mu_2\Pi_-(A,|f|)=0$. Покажем, что $\Pi_+(A,|f|)$ измеримо. Для этого введем функции $f_n=\frac{k}{n}$ на $A_{nk}=\{x\mid x\in A$ и $\frac{k-1}{n}\leq|f(x)|<\frac{k}{n}\}$, k и $n\in\mathbb{N}$. Каждая f_n - простая и измеримая на A функция, так как $0\leq f_n-|f|<\frac{1}{n}$ на A, то $f_n\to|f|$ равномерно на A. Покажем, что при $\forall n\ \exists\int_A f_n$. Действительно, берем $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\frac{k-1}{n}\leq|f|\leq\varphi$ п.в. на $A_{nk}\Rightarrow$, (т.к. измеримое множество $A_{nk}\subset A$, то $\exists\int_{A_{nk}}\varphi$ по Т.2) $0\leq\frac{k-1}{n}\mu A_{nk}\leq\int_{A_{nk}}\varphi$ при $\forall k\Rightarrow\sum\frac{k-1}{n}\mu A_{nk}$ сходится абсолютно, (т.к. $\sum_k\int_{A_{nk}}\varphi=\int_A\varphi$ при $\forall n$ по Т.7) $\overset{\text{Т.9}}{\Longrightarrow}\exists\int_A(f_n-\frac{1}{n})\overset{\text{Т.10}}{\Longrightarrow}$ $\exists\int_A f_n=\mu_2\Pi_+(A,f_n)<\infty$. Тогда измеримо $\bigcap\Pi_+(A,f_n)=$

$=\{(x,y)\mid x\in A$ и $0\leq y\leq f_n(x)$ при $\forall n\}\overset{(*)}{=}\{(x,y)\mid x\in A$ и $0\leq y\leq|f(x)|\}=$

$=\Pi_+(A,|f|)\subset\Pi_+(A,f_1)\Rightarrow\exists\mu_2\Pi_+(A,|f|)\leq\mu_2\Pi_+(A,f_1)<\infty\Rightarrow\exists\int_A|f|\Rightarrow\exists\int_A f.$

(*) при $\forall x\in A$: $f_n(x)>|f(x)|$ при $\forall n\Rightarrow\forall y\,(y\leq|f(x)|\Rightarrow y<f_n(x)$ при $\forall n)\Rightarrow\Pi_+(A,|f|)\subset\bigcap\Pi_+(A,f_n)$; $f_n\to|f|$ равномерно на $A\Rightarrow$ $\forall y\,(y>|f(x)|\Rightarrow\exists n$, что $f_n(x)<y)\Rightarrow(x,y)\notin\bigcap\Pi_+(A,f_n)\Rightarrow\Pi_+(A,|f|)\supset$

$\supset \bigcap \Pi_+(A, f_n)$; из этих двух включений следует равенство. Если $\mu A = \infty$, то множества $A_k = A \cap [k, k+1)$ измеримы при $\forall k \in \mathbb{Z}$ и $A_k \cap A_m = \varnothing$ при $k \neq m$. Поскольку $\mu A_k \leq 1$ при $\forall k$, то при $\forall k \exists \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} \varphi$ и сходится $\sum \int_{A_k} \varphi$ ($= \int_A \varphi$ по Т.7) $\Rightarrow \sum \int_{A_k} |f|$ сходится $\Rightarrow \exists \int_A f$ по Т.6. Теорема II полностью доказана.

Следствие I. Функция f измерима на A и ограничена п.в. на A, $\mu A < \infty \Rightarrow \exists \int_A f$.

Следствие 2. $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f$.

Следствие 3. Функция f измерима на A, $\mu A < \infty$, m и $M \in \mathbb{R}$, $m \leq f \leq M$ п.в. на $A \Rightarrow$

$$\exists \int_A f \quad \text{и} \quad m \cdot \mu A \leq \int_A f \leq M \cdot \mu A.$$

Следствие 4. Функция f измерима на A, $\mu A < \infty$, $\exists \int_A f^2 \Rightarrow \exists \int_A f$.

Для доказательства следствия 4 положим $B = \{x \mid x \in A$ и $|f(x)| \leq 1\}$. Множество B измеримо $\Rightarrow \exists \int_B f$. Из $\exists \int_A f^2 \Rightarrow \exists \int_{A \setminus B} f^2$, а т.к. $|f| < f^2$ на $A \setminus B$, то $\exists \int_{A \setminus B} f$ по Т.II. Поскольку $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, то по Т.6 и замечанию $\exists \int_A f$.

Пример 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ существует при $\alpha > 1$ и не существует при $\alpha \leq 1$.

По следствию 3, $0 \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ и $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ при любом $\alpha > 1$ сходится $\Rightarrow$ сходится $\sum \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \Rightarrow \exists \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ по Т.6. Из того, что $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}$ и $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ расходится при $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ расходится $\sum \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\Rightarrow \nexists \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, (т.к. если $\exists \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, то сходится $\sum \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ по Т.7).

Пример 5. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ существует при $\alpha < 1$ и не существует при $\alpha \geq 1$.

При $\alpha < 1$: $0 \leq \int_{1/n+1}^{1/n} \frac{dx}{x^\alpha} \leq (n+1)^\alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n+1)^\alpha}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ и сходится ряд $\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}} \Rightarrow$ сходится $\sum \int_{1/n+1}^{1/n} \frac{dx}{x^\alpha} \Rightarrow \exists \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ по Т.6.

При $\alpha\geqslant 1$: $\int\limits_{1/n+1}^{1/n}\frac{dx}{x^\alpha}\geqslant n^\alpha\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n^\alpha}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ и расходится $\sum\frac{1}{n^{2-\alpha}}$

$\Longrightarrow$ расходится $\sum\int\limits_{1/n+1}^{1/n}\frac{dx}{x^\alpha}\Rightarrow\not\exists\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ по Т.7 (стр. 20).

<u>Теорема I2</u>. $\exists\int\limits_A f$ и $\mu A<\infty\Rightarrow\exists(f_n)$ такая, что I) $\forall f_n$ – простая и измеримая на A функция; 2) $f_n\to f$ равномерно на A; 3) $\exists\int\limits_A f_n$ при $\forall n$; 4) $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n=\int_A f$.

Положим функцию $f_n=\frac{k}{n}$ на $A_{nk}=\left\{x\,|\,x\in A \text{ и } \frac{k}{n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$. Измеримо $\forall A_{nk}$, т.к. f измерима на A; $\forall f_n$ – простая и измеримая на A функция; $0\leqslant f-f_n<\frac{1}{n}$ на A при $\forall n\Rightarrow f_n\to f$ равномерно на A; $f_n=0$ на $A_{n0}\Rightarrow\exists\int\limits_{A_{n0}}f_n=0$ при $\forall n$; $0\leqslant|f_n|-\frac{1}{n}<|f|$ на $B_n=A\setminus A_{n0}$ и $\exists\int\limits_{B_n}|f|$ (по Т.2) $\overset{\text{T.11}}{\Longrightarrow}\exists\int\limits_{B_n}(|f_n|-\frac{1}{n})\overset{\text{T.10}}{\Longrightarrow}\exists\int\limits_{B_n}|f_n|\Rightarrow$ $\exists\int\limits_{B_n}f_n$. Т.к. $B_n\cap A_{n0}=\varnothing$, то $\exists\int_A f_n$ при $\forall n$. Поскольку $f_n\leqslant f\leqslant f_n+\frac{1}{n}$ на A, то $\int\limits_A f_n\leqslant\int\limits_A f\leqslant\int_A f_n+\frac{1}{n}\mu A\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n=\int_A f$.

<u>Теорема I3</u>. I) $f_n\to f$ равномерно на A; 2) $\exists\int_A f_n$ при $\forall n$; 3) $\forall f_n$ – простая функция; 4) $\mu A<\infty\Longrightarrow$ 1) $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n$ и 2) $\exists\int_A f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n$.

Из 2 $\Rightarrow$ A измеримо и $\forall f_n$ измерима на $A\Rightarrow f$ измерима на A (условие I и Т.5, §2). Из I $\Rightarrow\exists m\in\mathbb{N}$, что $|f|<|f_m|+1$ на A и, кроме того, $\exists\int\limits_A(|f_m|+1)$ (условие 2 и Т.10, условие 4) $\overset{\text{T.11}}{\Longrightarrow}\exists\int\limits_A f$. Из I $\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n(n>N\Rightarrow f_n-\varepsilon<f<f_n+\varepsilon$ на $A)\Rightarrow$ $\int\limits_A f_n-\varepsilon\mu A\leqslant\int\limits_A f\leqslant\int\limits_A f_n+\varepsilon\mu A\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_A f_n=\int\limits_A f$.

<u>Теорема I4</u>(линейность интеграла Лебега). $\exists\int_A f$, $\exists\int_A g$, α и $\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\exists\int\limits_A(\alpha f+\beta g)=\alpha\int\limits_A f+\beta\int\limits_A g.$$

Доказательство начнем со случая $\mu A<\infty$. Возьмем по Т.I2 функции $f_n \to f$ и (аналогично) измеримые и простые на A функции $g_n \to g$ равномерно на A, для которых $\exists \int_A g_n$ при $\forall n$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \int_A g_n = \int_A g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n$ – простая измеримая на A функция и $\exists \int_A (\alpha f_n + \beta g_n)$ при $\forall n$ (Т.10), $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ равномерно на $A \overset{\text{Т.13}}{\Longrightarrow} \exists \int_A (\alpha f + \beta g) = \lim_{n\to\infty} \int_A (\alpha f_n + \beta g_n) =$ $= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int_A f_n + \beta \int_A g_n\right) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$. Для случая $\mu A < \infty$ теорема I4 доказана. Если $\mu A = \infty$, то множества $A_k = A \cap [k, k+1)$ измеримы при $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A_k \cap A_m = \varnothing$ при $k \neq m$. Тогда по Т.7 $|\alpha| \int_A |f| +$ $+ |\beta| \int_A |g| = \sum |\alpha| \int_{A_k} |f| + \sum |\beta| \int_{A_k} |g| = \sum \left(|\alpha| \int_{A_k} |f| + |\beta| \int_{A_k} |g|\right) =$ $= \sum \int_{A_k} (|\alpha||f| + |\beta||g|)$, т.к. $\mu A_k \leq 1$ при $\forall k$, т.е. этот ряд сходится $\overset{\text{Т.6}}{\Longrightarrow} \exists \int_A (|\alpha||f| + |\beta||g|)$ и $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$ на $A \overset{\text{Т.11}}{\Longrightarrow}$

$$\exists \int_A (\alpha f + \beta g) \overset{\text{Т.7}}{=} \sum \int_{A_k} (\alpha f + \beta g) \overset{(*)}{=} \sum \left(\alpha \int_{A_k} f + \beta \int_{A_k} g\right) = \alpha \sum \int_{A_k} f + \beta \sum \int_{A_k} g \overset{\text{Т.7}}{=} \alpha \int_A f + \beta \int_A g.$$

(*) поскольку $\mu A_k \leq 1$ при $\forall k$.

Теорема I4 доказана полностью.

Упражнение I. Проверить, что всё, изложенное выше в §3, без изменений формулировок и доказательств сохраняется в $\mathbb{R}^n$. Указание: в $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ определена n-мерная мера μ_n (она в рассуждениях заменит меру μ, часто вместо μ_n пишут просто μ), в $(n+1)$ – мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_n, y)\}$ определена $(n+1)$-мерная мера μ_{n+1} (она заменит в рассуждениях меру μ_2), множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и измеримо по мере μ_n. Далее заменяем прямоугольники на брусы.

Дальнейшее связано с правилами вычисления интеграла в $\mathbb{R}$.

Если $\exists \int_a^b f$, то для $\forall x \in [a, b]$ $\exists \int_a^x f$ (Т.2). Таким образом определена функция $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которой при $\forall x \in [a, b]$

значение $\Phi(x) \overset{def}{=} \int_a^x f$. Эту функцию называют интегралом с переменным верхним пределом интегрирования. Теорему о дифференцируемости этой функции называют "правило дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу интегрирования".

Теорема I5. Функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и $\exists \int_a^b f \Rightarrow \exists \Phi'(x_0) = f(x_0)$.

При $\forall h > 0$ и $x_0 + h \in (a, b)$ имеем $\Delta\Phi = \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f =$
$= \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + f(x) - f(x_0))\,dx =$
$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx = f(x_0)h + \alpha(h)$. Т.к. f непрерывна в x_0, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (h, x) (x \in [x_0, x_0+h]$ и $h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha| < \varepsilon h) \Rightarrow \alpha = \bar{o}(h)$ при $h \to 0+$. Аналогично, при $\forall h < 0$ и $x_0 + h \in (a, b)$ получаем: $\Delta\Phi = f(x_0)h + \bar{o}(h)$ при $h \to 0-$. Итак, $\Delta\Phi = f(x_0)h + \bar{o}(h)$ при $h \to 0 \Rightarrow \exists \Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Замечание 4. Если f непрерывна справа при $x = a$, то $\exists \Phi'_+(a) = f(a)$; если f непрерывна слева при $x = b$, то $\exists \Phi'_-(b) = f(b)$. Доказательство следует из приведенных при доказательстве Т.I5 рассуждений.

Аналогично определяется интеграл с переменным нижним пределом интегрирования: если $\exists \int_a^b f$, то для $\forall x \in [a, b] \; \exists \int_x^b f$ (Т.2) и определяется функция $\Psi: [a, b] \to \mathbb{R}$ равенством $\Psi(x) \overset{def}{=} \int_x^b f$ для $\forall x \in [a, b]$. Теорему о ее дифференцируемости называют правилом дифференцирования интеграла по переменному нижнему пределу интегрирования.

Теорема I6. Функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и $\exists \int_a^b f \Rightarrow \exists \Psi'(x_0) = -f(x_0)$.

Упражнение 5. Доказать Т.I6 (указание - см.доказательство Т.I5). Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное замечанию 1.

Теорема I7 (существование первообразной). Промежуток $p \subset \mathbb{R}$ и $f \in C(p) \Rightarrow$ на p существует первообразная для f.

Возьмем $\forall \ell \in p$ и для $\forall x \in p$ определим функцию $F: p \to \mathbb{R}$ равенством

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x) \text{ при } x \geqslant \ell, \\ \Psi(x) \text{ при } x \leqslant \ell. \end{cases}$$

Функции Φ и Ψ существуют на p, т.к. при $\forall x \in p$ и $x > \ell$ будет $f \in C[\ell, x] \Rightarrow \exists \int_\ell^x f = \Phi(x)$; аналогично показывается $\exists \Psi$. Из Т.I5 $\Rightarrow$ при $\forall x \in p$ и $x > \ell$ $\exists F'(x) = \Phi'(x) = f(x)$. Из Т.I6 $\Rightarrow$ при $\forall x \in p$ и $x < \ell$ $\exists F'(x) = -\Psi'(x) = -(-f(x)) = f(x)$. При $x = \ell$: $\exists F'_+(\ell) = \Phi'_+(\ell) = f(\ell)$ и $\exists F'_-(\ell) = -\Psi'_-(\ell) = f(\ell) \Rightarrow \exists F'(\ell) = f(\ell)$.

Итак, $\exists F'(x) = f(x)$ при $\forall x \in p$, ч.т.д.

Теорема I8 (Ньютон-Лейбниц). $f \in C[a, b] \Rightarrow$, если F – первообразная для f на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F\Big|_a^b.$$

Из Т.II (следствие 2) $\Rightarrow \exists \int_a^b f$. Из Т.I7 $\Rightarrow$ существование первообразной для f на $[a, b]$. Из Т.I5 и замечания 4 $\Rightarrow \Phi$ – первообразная для f на $[a, b] \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$, что $\Phi(x) = F(x) + C$ при $\forall x \in [a, b]$. При $x = a$ имеем: $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$. При $x = b$ имеем: $\int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$.

Теорема I9 (интегрирование по частям). f и $g \in C^1[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f g' = f g\Big|_a^b - \int_a^b g f'.$$

Произведение fg – первообразная для $(fg)'$ на $[a, b] \overset{T.18}{\Longrightarrow}$

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \Rightarrow \int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b gf'.$$

Удобно определить $\int_a^b f$ и при $a > b$ равенством $\int_a^b f = -\int_b^a f$, в котором правая часть уже определена. Кроме того, при таком определении формула Ньютона-Лейбница верна при $\forall \{a, b\}$.

Теорема 20(замена переменной). Функция $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, интервал $J \supset \varphi([\alpha,\beta])$, $f \in C(J) \Rightarrow$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi\cdot\varphi'.$$

Из условия $f \in C(J) \overset{T.17}{\Longrightarrow} \exists F$ – первообразная для f на $J \Rightarrow (F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi\cdot\varphi' = f\circ\varphi\cdot\varphi'$ на $[\alpha,\beta] \Rightarrow F\circ\varphi$-первообразная для $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ на $[\alpha,\beta] \overset{T.18}{\Longrightarrow} \int_\alpha^\beta f\circ\varphi\cdot\varphi' = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$.

§ 4. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега

В этом параграфе рассматриваются достаточные условия для того, чтобы можно было писать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n, \tag{I}$$

т.е. когда перестановочны знаки предела и интеграла. То, что это не всегда можно делать, видно из следующего примера: положим

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при } x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Ясно, что $\int_{-1}^{2} f_n = 1$ при $\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^2 f_n = 1$. Однако, при $\forall x \in [-1;2]$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^2 \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$. Таким образом, здесь знаки предела и интеграла не перестановочны.

Самое простое достаточное условие истинности равенства (I) дает следующая теорема - случай равномерной сходимости.

Теорема I. I) Множество A измеримо и $\mu A < \infty$, 2) $f_n \to f$ равномерно на A; 3) $\exists \int_A f_n$ при $\forall n \Rightarrow \exists \int_A f$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$.

Из 2 $\Rightarrow \exists m \in N$, что $|f| < |f_m| + 1$ на A, из I и 3 $\Rightarrow \exists \int_A (|f_m| + 1)$. Отсюда следует (Т.II, §3) $\exists \int_A f$. Из 2 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n$ $(n > N \Rightarrow f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon$ на $A) \Rightarrow \int_A f_n - \varepsilon\mu A \le \int_A f \le \int_A f_n + \varepsilon\mu A \Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$.

Следствие I. Функциональный ряд $\sum u_n$ сходится равномерно на множестве A, $\mu A<\infty$, при $\forall n \exists \int_A u_n \Rightarrow \exists \int_A \sum u_n = \sum \int_A u_n$.

Пример I. Ряд $\sum (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$ сходится равномерно на $\forall [a,b] \subset (-1,1) \Rightarrow$ для $\forall x \in (-1,1)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum (-t)^{n-1} dt = \sum \int_0^x (-t)^{n-1} dt = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Следствие 2. I) Функции $f_n \in C^1(p)$ при $\forall n$, промежуток $p \subset \mathbb{R}$; 2) последовательность $\{f_n'\}$ сходится равномерно на p; 3) $\exists y \in p$ что сходится $\{f_n(y)\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно на p и при $\forall x \in p \ \exists f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Сначала докажем равномерную сходимость $\{f_n\}$ на p. Из 3 $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0 \exists N_1 \forall (n,k)(n$ и $k>N_1 \Rightarrow |f_n(y) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Из 2 $\Rightarrow \exists N_2 \forall (n,k,x)(x\in p,\ n$ и $k>N_2 \Rightarrow |f_n'(x) - f_k'(x)| < \frac{\varepsilon}{2m(p)})$.

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall (n,k,x)(x \in p,\ n$ и $k>N \Rightarrow$

$|f_n(x) - f_k(x)| \overset{T.18,\S 3}{=} |f_n(y) + \int_y^x f_n'(t)dt - f_k(y) - \int_y^x f_k'(t)dt| \leq$

$\leq |f_n(y) - f_k(y)| + |\int_y^x |f_n'(t) - f_k'(t)| dt| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m(p)} |x-y| < \varepsilon)$.

Таким образом, равномерно на $p \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow f(x) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(y) + \int_y^x f_n'(t)dt) \overset{T.1}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) + \int_y^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)\, dt$.

В силу 2 равномерно на $p \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x) \in C(p)$ в силу I и 2. Итак, $f(x) = C + \int_y^x \varphi(t)dt$ и (Т.I5, §3) $\exists (\int_y^x \varphi(t)dt)' =$ $= \varphi(x)$ при $\forall x \in p \Rightarrow \exists f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ при $\forall x \in p$.

Следствие 3. Члены функционального ряда $u_n \in C^1(p)$ при $\forall n$, промежуток $p \subset \mathbb{R}$, $\sum u_n'$ сходится равномерно на p и $\exists y \in p$ такое, что сходится $\sum u_n(y) \Rightarrow \sum u_n$ сходится равномерно на p и при $\forall x \in p \ \exists (\sum u_n)' = \sum u_n'$.

Прежде чем доказывать второе условие, при котором перестановочны знаки интеграла и предела, приведем три важные теоремы, дополняющие материал параграфов I, 2 и 3.

Теорема 2(непрерывность меры). I) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$, $\forall A_n$ измеримо $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu(\cap A_n)$. 2) $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots \subset A$, ... ства A, $\mu A < \infty$, и $\forall A_n$ измеримы $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu(\cup A_n)$.

Докажем утверждение I. Сначала разберем случай $\cap A_n = \varnothing$. Тогда $A_1 \overset{(\alpha)}{=} \cup(A_k \setminus A_{k+1})$ и $(A_k \setminus A_{k+1}) \cap (A_m \setminus A_{m+1}) = \varnothing$ при $k \neq m \Rightarrow$

$$\mu A_1 = \sum \mu(A_k \setminus A_{k+1}). \qquad (*)$$

Аналогично, $A_n = \bigcup\limits_{k \geq n} (A_k \setminus A_{k+1})$ и $\mu A_n = \sum\limits_{k \geq n} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$, но это остаток сходящегося ряда (*) и потому $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$.

(α) берем $\forall x \in A_1$, т.к. $\cap A_n = \varnothing$, то $\exists A_m \not\ni x \Rightarrow$, (т.к. A_n вложены) $\forall s > m \Rightarrow x \notin A_s \Rightarrow (\exists\, \ell < m$ такое, что $A_\ell \ni x$ и $A_{\ell+1} \not\ni x \Rightarrow x \in A_\ell \setminus A_{\ell+1})$ $\Rightarrow x \in \cup(A_k \setminus A_{k+1}) \Rightarrow A_1 \subset \cup(A_k \setminus A_{k+1})$; с другой стороны $A_k \setminus A_{k+1} \subset$ $\subset A_1$ при $\forall k \Rightarrow A_1 \supset \cup(A_k \setminus A_{k+1})$; из этих включений следует равенство $A_1 = \cup(A_k \setminus A_{k+1})$;

(β) пусть $k > m \Rightarrow k \geq m+1 \Rightarrow A_k \subset A_{m+1} \Rightarrow A_k \cap (CA_{m+1}) \subset A_{m+1} \cap$ $\cap (CA_{m+1}) = \varnothing \Rightarrow (A_k \setminus A_{k+1}) \cap (A_m \setminus A_{m+1}) = A_k \cap (CA_{k+1}) \cap A_m \cap (CA_{m+1}) =$ $= A_k \cap (CA_{m+1}) \cap \dots = \varnothing$.

В общем случае положим $A = \cap A_n$ и $B_n = A_n \setminus A$. Ясно, что $B_n \supset B_{n+1}$ при $\forall n$ и $\cap B_n = \cap(A_n \cap (CA)) = (CA) \cap (\cap A_n) = (CA) \cap A = \varnothing$, а потому (см. выше) $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mu B_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu A_n - \mu A)$, т.к. $A_n \supset$ $\supset A$ при $\forall n \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A = \mu(\cap A_n)$.

При доказательстве утверждения 2 положим $CA_n = A \setminus A_n \Rightarrow CA_n \supset$ $\supset CA_{n+1}$ при $\forall n \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu(CA_n) = \mu(\cap(CA_n))$ в силу утверждения I $\Rightarrow \mu(\cup A_n) = \mu A - \mu(C(\cup A_n)) = \mu A - \mu(\cap(CA_n)) = \mu A - \lim\limits_{n\to\infty} \mu(CA_n) =$ $= \mu A - \lim\limits_{n\to\infty} (\mu A - \mu A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$.

Теорема 3(Д.Ф.Егоров). $f_n \to f$ п.в. на A, $\forall f_n$ измерима на A, $\mu A < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists A_\varepsilon \subset A$, A_ε – измеримое множество, $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на A_ε.

функции $f_n \to f$ на $B=\bigcap\limits_k\bigcup\limits_m\bigcap\limits_{n>m}\{x|x\in A$ и $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}\subset A$ и B измеримо, т.к. $\forall f_n$ и f измеримы на A, $\mu(A\setminus B)=0$ (т.к. $f_n\to f$ п.в. на A). Положим $A_{km}=\bigcap\limits_{n>m}\{x|x\in A$ и $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}$, $A_k=\bigcup\limits_m A_{km}$, тогда $B=\bigcap A_k$. При фиксированном $\forall k\in N$: $A_{k1}\subset$

$\subset A_{k2}\subset\ldots\subset A_{km}\subset A_{km+1}\subset\cdots\subset A \overset{T.2}{\Rightarrow} \mu A_k=\lim\limits_{m\to\infty}\mu A_{km}\Rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists m(k)\left(|\mu A_k-\mu A_{km(k)}|<\frac{\varepsilon}{2^k}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\mu(A_k\setminus A_{km(k)})<\frac{\varepsilon}{2^k}\right). \qquad (\alpha)$$

(*) $A_{km(k)}\subset A_k\Rightarrow\mu(A_k\setminus A_{km(k)})=\mu A_k-\mu A_{km(k)}$.

Положим

$$A_\varepsilon=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{km(k)}. \qquad (\beta)$$

Покажем, что $f_n\to f$ равномерно на A_ε. Для $\forall x\in A_\varepsilon$ и $\forall\delta>0\,\exists k\left(k>\frac{1}{\delta}\right.$ и $\left.x\in A_{km(k)}\right)\Rightarrow\forall n\left(n>m(k)\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}<\delta\right)$, ч.т.д. Оценим теперь $\mu(A\setminus A_\varepsilon)$. Для множеств $S\subset A$ положим $CS=A\setminus S$.

Тогда $\mu(A\setminus A_\varepsilon)=\mu(CA_\varepsilon)\overset{(\beta)}{=}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(CA_{km(k)})\right)\overset{T.3,\S1}{\leq}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(CA_{km(k)})\overset{(*)}{=}$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\setminus A_{km(k)})\overset{(\alpha)}{<}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$

(*) при $\forall k$: $B\subset A_k\Rightarrow CA_k\subset CB=A\setminus B\Rightarrow\mu(CA_k)=0\Rightarrow CA_{km(k)}=$

$=((CA_k)\cup A_k)\cap(CA_{km(k)})=((CA_k)\cap(CA_{km(k)}))\cup(A_k\cap(CA_{km(k)}))=$

$=\mathcal{D}_k\cup(A_k\setminus A_{km(k)})\overset{T.4,\S1}{=}$ (т.к. $\mathcal{D}_k\subset CA_k\Rightarrow\mu\mathcal{D}_k=0$) $\mu(CA_{km(k)})=$

$=\mu(A_k\setminus A_{km(k)})\overset{(\alpha)}{<}\frac{\varepsilon}{2^k}$.

Таким образом доказано, что $\mu(A\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$, и теорема 3 полностью доказана.

Теорема 4 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега).

$\exists\int\limits_A f\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall e$ (множество измеримо $e\subset A$ и $\mu e<\delta\Rightarrow|\int\limits_e f|<\varepsilon$).

Положим $A_n=\{x|x\in A \quad n-1\leq|f(x)|<n\}$, $n\in N$. Измеримо $\forall A_n$, т.к.

из $\exists\int_A f \Rightarrow f$ измерима на A ; $A_n\cap A_k=\varnothing$ при $n\neq k$ и $A=\cup A_n \Rightarrow$ (Т.5 и 7, §3) $\int_A|f|=\sum\int_{A_n}|f| \Rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\, m\in N,\ \text{что}\ \sum_{n>m}\int_{A_n}|f|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\alpha)$$

Берем $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2m}\right)$ и любое измеримое множество $e\subset A$ с $\mu e<\delta$ Тогда по Т.2, §3

$$\exists\int_e|f| \overset{T.7,\S 3}{=} \sum\int_{e\cap A_n}|f|. \qquad (\beta)$$

Если $n\leq m$, то

$\int_{e\cap A_n}|f|\leq m\mu(e\cap A_n) \Rightarrow \sum_{n\leq m}\int_{e\cap A_n}|f|\leq m\sum_{n<m}\mu(e\cap A_n)\leq m\sum_{n=1}^{\infty}\mu(e\cap A_n)=m\mu e<\frac{\varepsilon}{2}$ (γ),

т.к. $e=e\cap A=e\cap(\cup A_n)=\cup(e\cap A_n)$ и из $k\neq n \Rightarrow (e\cap A_n)\cap(e\cap A_k)=$ $=e\cap A_n\cap A_k=\varnothing$ и $\mu e<\delta<\varepsilon/2m$. Поскольку $|f|\geq 0$, то $\int_{e\cap A_n}|f|\leq$ $\leq\int_{A_n}|f| \Rightarrow \sum_{n>m}\int_{e\cap A_n}|f|\leq\sum_{n>m}\int_{A_n}|f| \overset{(\alpha)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда ($\beta$) и ($\gamma$) $\Rightarrow$

$$\int_e|f|<\varepsilon \Rightarrow \left|\int_e f\right|\leq\int_e|f|<\varepsilon,\ \text{ч.т.д.}$$

Теперь можно доказать вторую теорему о предельном переходе под знаком интеграла - достаточное условие Лебега:

Теорема 5. I) $f_n\to f$ п.в. на A; 2) $\forall f_n$ измерима на A; 3) $|f_n|\leq\varphi$ на A при $\forall n$; 4) $\exists\int_A\varphi \Rightarrow$ 1) $\exists\lim_{n\to\infty}\int_A f_n$ и 2) $\exists\int_A f=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n$.

Из 2 $\Rightarrow A$ измеримо $\Rightarrow$ (условие I и Т.5, §2) f измерима на A. Из 3 и 4 $\overset{T.11,\S 3}{\Longrightarrow} \exists\int_A f_n$ при $\forall n$. Из 3 и I $\Rightarrow |f|\leq\varphi$ п.в. на $A \overset{T.11,\S 3}{\Longrightarrow} \exists\int_A f$. По Т.4

для $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall$(измеримое множество)$e\subset A$

$$\mu e<\delta \Rightarrow \int_e\varphi<\frac{\varepsilon}{5}. \qquad (\alpha)$$

Положим $A_k=A\cap([k,k+1)\cup[1-k,2-k)),\ k\in N$. Из 4 $\Rightarrow$ (Т.7, §3) $\sum\int_{A_k}\varphi=\int_A\varphi<\infty \Rightarrow$

$$\exists\, m\in N,\ \text{что}\ \sum_{k>m}\int_{A_k}\varphi<\frac{\varepsilon}{5}. \qquad (\beta)$$

Положим $B=\bigcup_{k\leq m}A_k$, тогда

$$\int_A f - \int_A f_n = \int_B (f-f_n) + \sum_{k>m} \int_{A_k} (f-f_n). \qquad (\gamma)$$

Поскольку $|f-f_n| \le |f|+|f_n| \le 2\varphi$ п.в. на A_k при $\forall (k,n) \Rightarrow$

$$\left|\int_{A_k}(f-f_n)\right| \le \int_{A_k}|f-f_n| \le 2\int_{A_k}\varphi \Rightarrow$$

$$\left|\sum_{k>m}\int_{A_k}(f-f_n)\right| \le \sum_{k>m}\left|\int_{A_k}(f-f_n)\right| \le \sum_{k>n} 2\int_{A_k}\varphi \overset{(\beta)}{<} \frac{2\varepsilon}{5} \text{ при } \forall n. \qquad (\tau)$$

Из I $\Rightarrow f_n \to f$ п.в. на B и $\mu B < \infty$ (т.к. $B \subset [-m, m+1]$) $\Rightarrow$ (Т.5) существует измеримое множество $B_\delta \subset B$ такое, что $\mu(B \setminus B_\delta) < \delta$ и $f_n \to f$ равномерно на $B_\delta \overset{T.1}{\Rightarrow} \exists N \forall n (n>N \Rightarrow \left|\int_{B_\delta} f - \int_{B_\delta} f_n\right| < \frac{\varepsilon}{5})$.

Тогда для $\forall n > N \Rightarrow \left|\int_B (f-f_n)\right| \le \left|\int_{B_\delta}(f-f_n)\right| + \left|\int_{B\setminus B_\delta}(f-f_n)\right| <$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \int_{B\setminus B_\delta}(|f|+|f_n|) \le \frac{\varepsilon}{5} + \int_{B\setminus B_\delta} 2\varphi \overset{(\alpha)}{<} \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Используем эту оценку и (τ) для оценки в (γ):

$$\forall n > N \Rightarrow \left|\int_A f - \int_A f_n\right| \le \left|\int_B (f-f_n)\right| + \left|\sum_{k>m}\int_{A_k}(f-f_n)\right| < \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon \text{ ч.т.д.}$$

Пример 2. $\sin x^n \to 0$ п.в. на $[-1,1]$ и $|\sin x^n| \le 1$ на $[-1,1]$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sin x^n dx = \int_{-1}^{1} 0\, dx = 0.$$

Следующую теорему предварим некоторым замечанием.

Замечание. При вычислении интеграла множества $\Pi_\pm(A,f)$ можно заменить на множества $\Pi_+^*(A,f) = \{(x,y) \mid x \in A \text{ и } 0 < y < f(x)\}$ и $\Pi_-^*(A,f) = \{(x,y) \mid x \in A \text{ и } f(x) < y < 0\}$, (т.е. нестрогие неравенства заменяются на строгие). Действительно, $\Pi_\pm(A,f) = \Pi_\pm^*(A,f) \cup \cup \{(x,0) \mid x \in A\} \cup \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$; $\mu_2\{(x,0) \mid x \in A\} = 0$, т.к. это множество принадлежит оси Ox. Докажем, что и $\mu_2\{(x,f(x)) \mid x \in A\} = 0$, т.е. плоская мера графика измеримой функции равна нулю. При фиксированном $\forall n \in N$ множество $\{(x,f(x)) \mid x \in A\} \subset$

$$\subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\{x \mid x \in A \text{ и } \frac{k-1}{n} \le f(x) < \frac{k}{n}\right\} \times \left\{y \mid \frac{k-1}{n} \le y \le \frac{k}{n}\right\}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (A_k \times P_k) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu_2^*\{(x,f(x))|x\in A\} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_2^*(A_k\times P_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\mu A_k = \frac{1}{n}\mu A \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_2^*\{(x,f(x))|x\in A\} = 0 \Rightarrow \mu_2\{(x,f(x))|x\in A\} = 0$. Следовательно, измеримо $\Pi_\pm(A,f) \Leftrightarrow$ измеримо $\Pi_\pm^*(A,f)$, при этом $\mu_2\Pi_\pm(A,f) = \mu_2\Pi_\pm^*(A,f)$.

Теорема 6 (Леви). I) Множество A измеримо и $\mu A<\infty$; 2) функции $f_1\le f_2\le\dots\le f_n\le f_{n+1}\le\dots$ на A; 3) $\exists \int_A f_n$ при $\forall n$; 4) $\exists K\in\mathbb{R}$, что $\int_A f_n < K$ при $\forall n \Rightarrow$ 1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \le K$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f < \infty$ п.в. на A; 3) $\exists \int_A f = \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n$.

Из 2 и 3 $\Rightarrow \left\{\int_A f_n\right\}$ неубывает и ограничена сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n \le K$. Положим $g_n = f_n - f_1 + 1$. При $\forall n$: g_n измерима на A и $g_{n+1} \ge g_n \ge 1$, $\exists \int_A g_n \overset{3),1)}{=} \int_A f_n - \int_A f_1 + \mu A \overset{4)}{\Rightarrow} \exists M\in\mathbb{R}$, что $\int_A g_n < M$. Из $g_{n+1} \ge g_n \ge 1$ на $A \Rightarrow$ при $\forall x\in A\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \ge 1$ и, возможно, $g=\infty$ на некотором множестве $B\subset A$, которое измеримо, (т.к. $B = \bigcap\limits_{k}\bigcup\limits_{m}\bigcap\limits_{n>m}\{x|x\in A$ и $g_n(x)>k\}$). Покажем, что $\mu B = 0$. Предположим, что $\mu B>0$. Т.к. $\frac{1}{g_n}\to 0$ на B, то по Т.3 существует измеримое множество $D\subset B$ с $\mu D > \frac{1}{2}\mu B$, на котором $\frac{1}{g_n}\to 0$ равномерно $\Rightarrow \exists N\,\forall (n,x)(x\in D$ и $n>N \Rightarrow \frac{1}{g_n(x)} < \frac{\mu D}{2M} \Rightarrow g_n(x) > \frac{2M}{\mu D}) \Rightarrow$
$\int_A g_n \ge \int_D g_n \ge 2M$ при $\forall n>N \Rightarrow$ противоречие с тем, что $\int_A g_n < M$ при $\forall n \Rightarrow \mu B = 0$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty}(g_n + f_1 - 1) = g + f_1 - 1 = f < \infty$ п.в. на A. Множество $\Pi_-(A,g) = \varnothing$, $\Pi_+^*(A,g) \overset{(*)}{=} \bigcup(A, g_n)$ и $\Pi_+^*(A,g_n) \subset$
$\subset \Pi_+^*(A,g_{n+1}) \overset{T.2}{\Rightarrow} \exists \mu_2\Pi_+^*(A,g) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_2\Pi_+^*(A,g_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_A g_n \le M \Rightarrow$

$$\exists\int_A g = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n \Rightarrow \exists \int_A f = \int_A g + \int_A f_1 - \mu A = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n + \int_A f_1 - \mu A =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_A f_n - \int_A f_1 + \mu A\right) + \int_A f_1 - \mu A = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n.$$

$(*)\ \Pi_+^*(A,g) = \{(x,y)|x\in A$ и $0<y<\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \Leftrightarrow \exists n(y<g_n(x))\} = \bigcup \Pi_+^*(A,g_n)$.

Теорема 6 полностью доказана.

Следствие. 1) Множество A измеримо и $\mu A<\infty$; 2) $\sum\int_A|\varphi_n|<\infty$ $\Rightarrow \sum\varphi_n$ абсолютно сходится п.в. на A и $\exists\int_A\sum\varphi_n=\sum\int_A\varphi_n$.

Функции $f_n=\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k|$ удовлетворяют условиям теоремы 6 $\Rightarrow$ (1) $\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|<\infty$ п.в. на A и (2) $\exists\int_A\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|=\lim_{n\to\infty}\int_A\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k|$.

Из (1) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ сходится абсолютно п.в. на A; $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\right|\leq$ $\leq\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|$ и (2) $\xRightarrow{T.11,\S3}$ $\exists\int_A\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$; $\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|$ на A при $\forall n$ и $\exists\int_A\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\xRightarrow{T.5}\int_A\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k=\int_A\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_A\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}\int_A\varphi_k$.

§ 5. Дополнения

При решении некоторых задач приходится интегрировать функции нескольких переменных только по части этих переменных. Например, при любом фиксированном $y>0$ вычисляется интеграл

$$\int_1^2 x^y dx=\frac{2^{y+1}-1}{y+1}.$$

Получается функция от y. Общий случай (для функций двух аргументов) определяется так: 1) множество $A\subset Ox$ и множество $B\subset Oy$, их прямое произведение $D=A\times B$ есть множество в плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$, 2) функция $f:D\to\mathbb{R}$ и такова, что при фиксированном $y\in B$ $\exists\int_A f(x,y)dx$. Этот интеграл называют – интеграл, зависящий от параметра, переменная y – параметр. Таким образом определена функция $J:B\to\mathbb{R}$, для которой при $\forall y\in B$ значение $J(y)\overset{def}{=}\int_A f(x,y)dx$. Это еще один из способов задания функции. Возникает задача – изучить свойства функции.

Начнем с достаточного условия непрерывности интеграла, зависящего от параметра:

Теорема 1. 1) Функция $f\in C(A\times B)$; 2) $|f(x,y)|\leq\varphi(x)$

при $\forall(x,y)\in A\times B$; 3) $\exists\int_A \varphi \Rightarrow \mathcal{I}\in C(B)$.

Для фиксированного $\forall y\in B$ берем $\forall\{y_n\}\subset B$ $y_n\to y \Rightarrow$ при фиксированном $\forall x\in A$ $f(x,y_n)\to f(x,y)$ в силу I и $|f(x,y_n)|\le\varphi(x)$ при $\forall x\in A$ и $\forall n \overset{T.5}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f(x,y_n)dx$ $\exists\int_A f(x,y)dx =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f(x,y_n)dx \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{I}(y_n)=\mathcal{I}(y)$ ч.т.д.

Следствие I. Если $\mu A<\infty$, то условие 2 можно заменить ограниченностью f на $\mathcal{D}$.

Следствие 2. Если множества A и B замкнуты и ограничены, то условия 2 и 3 можно не требовать, (т.к. в этом случае $\mathcal{D}$ – компакт и f ограничена на $\mathcal{D}$).

Следующая теорема – достаточное условие дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, и правило Лейбница.

<u>Теорема 2.</u> I) Функция $f:(A\times B)\to\mathbb{R}$, где A и B – интервалы, $\mu B<\infty$, при фиксированном $\forall y\in B$ функция измерима на A; 2) на $A\times B$ $\exists f'_y$ такая, что $|f'_y(x,y)|\le\varphi(x)$ при $\forall(x,y)\in A\times B$, 3) $\exists\int_A\varphi$; 4) $\exists y_0\in B$, что $\exists\int_A f(x,y_0)dx \Rightarrow$ при $\forall y\in B$:
1) $\exists\int_A f(x,y)dx$, 2) $\exists\int_A f'_y(x,y)dx$, 3) $\exists\mathcal{I}'(y)=\int_A f'_y(x,y)dx$.

Докажем $\exists\int_A f(x,y)dx$ при $\forall y\in B$, (т.е. – на B определена функция $\mathcal{I}(y)$). Фиксируем $\forall x\in A$, тогда для $\forall y\in B$ (по формуле Лагранжа и условию 2) $\exists\xi$ между y и y_0 такое, что $f(x,y)-f(x,y_0)=$
$=(y-y_0)f'_y(x,\xi) \Rightarrow |f(x,y)|\le|f(x,y_0)|+|y-y_0||f'_y(x,\xi)| \overset{2)}{\le} |f(x,y_0)|+$
$+\varphi(x)\mu B$ при фиксированном $\forall y\in B$ и $\forall x\in A \Rightarrow$ (в силу условий 3 и 4 и Т.II, §3) $\exists\int_A f(x,y)dx$ при фиксированном $\forall y\in B$. ч.т.д. Для доказательства формулы Лейбница (утверждение 3) фиксируем $\forall y\in B$, берем $\forall\{y_n\}\subset B\setminus\{y\}$ и $y_n\to y$, тогда

$$\frac{\mathcal{I}(y_n)-\mathcal{I}(y)}{y_n-y}=\int_A\frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}dx=\int_A\psi_n(x)dx.$$

При фиксированных $\forall x\in A$ и $\forall y\in B$ (по условию 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) =$ $= f'_y(x,y)$, кроме того, по формуле Лагранжа $\exists \xi_n$ между y и y_n такое, что $|\psi_n(x)| = |f'_y(x,\xi_n)| \le \varphi(x)$ на A при $\forall n \overset{T.5}{\Rightarrow} \exists \int_A f'_y(x,y)\,dx$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_A \psi_n(x)\,dx = \int_A \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)\,dx = \int_A f'_y(x,y)\,dx \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{J(y_n) - J(y)}{y_n - y} = \int_A f'_y(x,y)\,dx \Rightarrow$ (определение предела по Гейне) $\exists\, J'(y) = \int_A f'_y(x,y)\,dx$.

Приведем еще простейшую теорему об интегрировании по параметру интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3. Функция $f:(A\times B)\to\mathbb{R}$, где A и B – отрезки и $f\in C(A\times B) \Rightarrow$ 1) $\exists \int_A f(x,y)\,dx$ при $\forall y\in B$ и

$$2)\ \exists \int_B\Big(\int_A f(x,y)\,dx\Big)dy = \int_A\Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)dx.$$

Пусть $A=[a,b]$ и $B=[p,q]$. При фиксированном $y\in B$ функция $f(x,y)$ непрерывна на A и потому $\exists \int_A f(x,y)\,dx$, и это непрерывная функция на A (Т.1, следствие 2). Аналогично с $\int_B f(x,y)\,dy$. для $\forall t\in(a,b)$ вычислим производные:

$$\Big(\int_a^t\Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)dx\Big)'_t = \int_B f(t,y)\,dy,$$

$$\Big(\int_B\Big(\int_a^t f(x,y)\,dx\Big)dy\Big)'_t = \int_B\Big(\int_a^t f(x,y)\,dx\Big)'_t\,dy = \int_B f(t,y)\,dy.$$

Эти производные равны, а обе дифференцируемые функции при $t = a$ равны нулю. Следовательно, эти функции совпадают при $\forall t\in A$ и потому

$$\int_a^b\Big(\int_p^q f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_p^q\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy.$$

Для приложений удобно рассматривать интеграл как предел интегральных сумм. После стандартных объяснений понятия интегральной суммы и ее предела доказывается теорема.

Теорема 4. Функция $f\in C[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum f(\xi_k)\Delta x_k$.

Существование интеграла, обозначим его J, уже было доказано (Т.II, следствие 2, §3). Для $\forall\varepsilon>0$ в силу равномерной непрерывности f на $[a,b]$ $\exists\delta>0$ такое, что для любого разбиения отрезка

$$\lambda<\delta \Rightarrow \forall(x',x',k)\left(x' \text{ и } x''\in[x_{k-1},x_k] \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right). \qquad (*)$$

Тогда для любого разбиения отрезка $[a,b]$ с $\lambda<\delta$ в силу аддитивности интеграла имеем:

$$J=\int_a^b f=\sum\int_{x_{k-1}}^{x_k} f=\sum f(\eta_k)\Delta x_k\ ,\ \eta_k\in[x_{k-1},x_k],$$

по теореме о среднем. И при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$

$$|J-\sum f(\xi_k)\Delta x_k|=|\sum f(\eta_k)\Delta x_k-\sum f(\xi_k)\Delta x_k|\leqslant\sum|f(\eta_k)-f(\xi_k)|\Delta x_k\leqslant\varepsilon \text{ ч.т.д.}$$

Предел интегральных сумм существует не только для непрерывных на отрезке функций. Если функция f такова, что существует число $J=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_k)\Delta x_k$, то функцию f называют интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, а число J называют интегралом Римана функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначают $(R)\int_a^b f$ (буква R ставится для того, чтобы этот интеграл отличать от интеграла Лебега, о котором мы всё время говорили выше). Сразу заметим, что функция Дирихле f (§3, пример I), интегрируемая по Лебегу, не интегрируема по Риману, т.к. при $\forall\{x_k\}$ - разбиении отрезка $[a,b]$, интегральная сумма $\sigma=\sum f(\xi_k)\Delta x_k=0$, если все $\xi_k\notin\mathbb{Q}$ и $\sigma=b-a$, если все $\xi_k\in\mathbb{Q}$ и потому $\nexists\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$. Следующие теоремы выясняют взаимоотношение между интегралами Римана и Лебега.

Начнем со вспомогательной теоремы.

Теорема 5. Функция $g\geqslant 0$ на A и $\int_A g=0 \Rightarrow g=0$ п.в. на A.

Для доказательства введем множества $A_n=\{x\,|\,x\in A \text{ и } g(x)>\frac{1}{n}\}$.

Тогда $0=\int\limits_A g \geqslant \int\limits_{A_n} g \geqslant \frac{1}{n}\mu A_n \Rightarrow \mu A_n = 0$. А т.к. множество $B = \cup A_n$ и $A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu B = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$ и $g=0$ на $A\setminus B \Rightarrow g=0$ п.в. на A.

Теорема 6. Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b] \Rightarrow$ 1) f ограничена и измерима на $[a,b]$; 2) $\exists \int\limits_a^b f = (R)\int\limits_a^b f$; 3) f непрерывна п.в. на $[a,b]$.

Прежде всего докажем, что f ограничена на $[a,b]$, т.е. $\exists M\in\mathbb{R}$ такое, что $|f|\leq M$ на $[a,b]$. Действительно, предположим, что f неограничена на $[a,b]$. Тогда для $\forall\{x_k\}$ - разбиения $[a,b]$, функция f неограничена на некотором отрезке $[x_{k-1},x_k]$. Зафиксируем выбор всех ξ_i при $i\neq k$ и заметим, что

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geqslant |f(\xi_k)|\Delta x_k - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|.$$

Отсюда видно, что для $\forall \mathcal{L}\, \exists \xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ такое, что

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| > \mathcal{L} \Rightarrow \nexists \lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i,$$

что противоречит условию теоремы. Этим ограниченность функции f на отрезке $[a,b]$ доказана.

Теперь возьмем последовательность разбиений отрезка $[a,b]$ точками $x_{ni} = a + i(b-a)2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, $i=0,1,\dots,2^n$, и положим

$$m_{ni} = \inf\{f(x)\,|\,x\in[x_{ni-1},x_{ni}]\},\quad M_{ni} = \sup\{f(x)\,|\,x\in[x_{ni-1},x_{ni}]\}.$$

Эти числа существуют, т.к. f ограничена на $[a,b]$. Для каждого разбиения определим две функции

$$\varphi_n = m_{ni} \text{ на } [x_{ni-1},x_{ni}),\ \varphi_n(b)=f(b);\quad \psi_n = M_{ni} \text{ на } [x_{ni-1},x_{ni}),\ \psi_n(b)=f(b).$$

Это простые и измеримые на $[a,b]$ функции, для них при $\forall n$:

$$|\varphi_n|\leq M \text{ и } \exists \int\limits_a^b \varphi_n = \sum_i m_{ni}\Delta x_{ni},\quad |\psi_n|\leq M \text{ и } \exists \int\limits_a^b \psi_n = \sum_i M_{ni}\Delta x_i,$$

кроме того, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ и $\int\limits_a^b \varphi_n \leq M(b-a)$ (при $\forall n$) $\Rightarrow$ (Т.6, §4)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ на $[a,b]$, $|\varphi| \le M$ на $[a,b]$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n$ и $\exists \int_a^b \varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n$. (α)

, аналогично, $\psi_n \geq \psi_{n+1}$ и $\int_a^b \psi_n \geq -M(b-a)$ при $\forall n \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ на $[a,b]$, $|\psi| \le M$ на $[a,b]$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$ и $\exists \int_a^b \psi = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$.

При этом $\int_a^b \varphi_n \le \int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi \le \int_a^b \psi_n$ для $\forall n$ и $\varphi \le f \le \psi$ на $[a,b]$.

Очевидно, что для $\forall (n,i)\ \exists \xi_{ni} \in [x_{ni-1}, x_{ni}]$ такие, что

$$\sum_i f(\xi_{ni})\Delta x_{ni} - \frac{1}{n} < \int_a^b \varphi_n \le \sum_i f(\xi_{ni})\Delta x_{ni} \text{ при } \forall n$$

откуда следует (см. (α)):

$$\int_a^b \varphi = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\sum_i f(\xi_{ni})\Delta x_{ni} = (R)\int_a^b f.$$

И, аналогично,

$$\int_a^b \psi = (R)\int_a^b f.$$

Но тогда $\int_a^b (\psi - \varphi) = 0 \Rightarrow$, (поскольку $\psi - \varphi \geq 0$ на $[a,b]$

по Т.6) $\psi = \varphi$ п.в. на $[a,b] \Rightarrow$, (т.к. $\varphi \le f \le \psi$ на $[a,b]$) $f =$
$= \varphi = \psi$ п.в. на $[a,b] \Rightarrow$ (Т.1, §8) f измерима на $[a,b]$ и

$$\exists \int_a^b f = \int_a^b \varphi = (R)\int_a^b f.$$

Покажем, наконец, что для $\forall x_0 \in [a,b] \setminus \{x_{ni}\}$ из $\varphi(x_0) = \psi(x_0) \Rightarrow$ функция f непрерывна в x_0. Действительно, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in N$ такое, что $\varphi_n(x_0) > \varphi(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$, $\psi_n(x_0) < \psi(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$

$\exists (x_{ni-1}, x_{ni}) \ni x_0$. Но φ_n и ψ_n постоянны на этом интервале и $\varphi_n(x_0) = m_{ni} \le f(x) \le M_{ni} = \psi_n(x_0)$ при $\forall x \in (x_{ni-1}, x_{ni}) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon <$
$< \varphi_n(x_0) \le f(x) \le \psi_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$. Итак, $\forall x \in (x_{ni-1}, x_{ni}) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

функция f непрерывна в точке x_0. А т.к. равенство $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ выполнено п.в. на $[a,b]$ и $\mu\{x_{ni}\} = 0$, то f непрерывна п.в. на $[a,b]$. Теорема 6 доказана полностью.

Таким образом интеграл Лебега есть обобщение интеграла Римана (который был изобретен лет на двести раньше).

Теорема . Функция f ограничена на $[a,b]$, $\mathcal{P}$ — множество точек разрыва f на $[a,b]$ и $\mu\mathcal{P}=0 \Rightarrow 1)\ \exists (R)\int_a^b f$ и $2)\ \exists \int_a^b f = (R)\int_a^b f$.

Сохраним обозначения из доказательства т. ... $\forall x_0 \in [a,b] \setminus (\mathcal{P} \cup \{x_{ni}\})$ функция f непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \left(x\in[a,b] \text{ и } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Для этой точки при $\forall n\ \exists [x_{n i_n-1}, x_{n i_n}] \ni x_0$. . . $\Delta x_{n i_n} = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n\to\infty$, то $\exists N\ \forall n\ (n>N \Rightarrow [x_{n i_n-1}, x_{n i_n}] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow 0 \le f(x_0) - m_{n i_n} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow 0 \le f(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow \varphi_n \to f$ п.в. на $[a,b]$ и, кроме того, $|\varphi_n| \le M$ на $[a,b]$ при $\forall n \Rightarrow$ (Т.5,§4)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \quad \text{и} \quad \exists \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n . \qquad (\alpha)$$

И, аналогично,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \quad \text{и} \quad \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n . \qquad (\beta)$$

Из (α) и $(\beta) \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$ такое, что

$$0 \le \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Фиксируем это n и берем $\forall \{x_k\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ $\lambda < \min\left(\frac{\varepsilon}{M\cdot 2^{n+3}}, \frac{b-a}{10\cdot 2^n}\right)$. Пусть выбраны $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1,2,\dots,p$. Положим функцию $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ равной $g=f(\xi_k)$ на $[x_{k-1}, x_k)$ и $g(b)=f(b)$. Это простая и измеримая на $[a,b]$ функция, для нее

$$\int_a^b g = \sum f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| \le \sum \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f-g| \overset{(*)}{=} \sum_{k\in\mathfrak{M}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f-g| + \sum_{k\in\mathfrak{N}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f-g| \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathfrak{M}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\psi_n - \varphi_n) + 2M\cdot 2\lambda\cdot 2^n \le \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\exists \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f \Leftrightarrow \exists (R)\int_a^b f = \int_a^b f$.

(*) $\mathfrak{M}$ – множество всех номеров k, для которых $\exists[x_{n_{i-1}}, x_{n_i}]\supset$ $\supset[x_{k-1}, x_k]$; $\mathfrak{N}$ – множество всех остальных номеров k ; $A_k=$ $=[x_{n_{i-1}}, x_{n_i}]\setminus \bigcup[x_{k-1}, x_k]$ (объединение распространено на все номера k, для которых $[x_{k-1}, x_k]\subset[x_{n_{i-1}}, x_{n_i}]$).

Из теорем 6 и 7 как следствие получается критерий Лебега интегрируемости по Риману функции на отрезке, т.е. $\exists (R)\int_a^b f$.

Теорема 8. $\exists (R)\int_a^b f \Longleftrightarrow f$ ограничена на $[a,b]$ и непрерывна п.в. на $[a,b]$. При этом $\exists \int_a^b f=(R)\int_a^b f$.

Упражнение I. Доказать утверждения: I) функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$, интервал $J\supset f([a,b])$, функция $\varphi\in$ $\in C(J) \Rightarrow$ функция $\varphi\circ f$ интегрируема по Риману на $[a,b]$; 2) функции f и g интегрируемы по Риману на $[a,b] \Rightarrow$ функции $\alpha f+\beta g$ (α и $\beta\in\mathbb{R}$) и fg интегрируемы по Риману на $[a,b]$; 3) функция g интегрируема по Риману на $[a,b]$ и $|g|\geq r>0$ на $[a,b]\Rightarrow$ функция $1/g$ интегрируема по Риману на $[a,b]$; 4) функция $\varphi\in C[\alpha,\beta]$, интегрируемая по Риману на $[a,b]$ функция f, $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]\Rightarrow$ функция $f\circ\varphi$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$.

Упражнение 2. Привести пример двух функций f и g, интегрируемых по Риману на отрезках $[a,b]$ и $[p,q]$, соответственно, и таких, что функция $g\circ f$ не интегрируема по Риману на $[a,b]$. (Указание: воспользоваться функцией $\ell(x)=0$ при $x\notin \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, если же $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ и дробная доля x равна $\frac{m}{n}$, m и $n\in\mathbb{N}$ и взаимно просты, то $\ell(x)=\frac{1}{n}$.)

В заключение приведу пример Вейерштрасса (один из целой серии, но наиболее удобный для анализа) непрерывной функции, нигде не имеющей производной.

Пример. Докажем, что функция

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(8^k x)}{2^k} \tag{I}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и не имеет производной при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Действительно, ряд (I) сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как $\left|\frac{\sin(8^k x)}{2^k}\right| \leqslant \frac{1}{2^k}$ при $\forall k$. А поскольку все члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, то функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для дальнейшего заметим, что при $\forall t \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства: или $\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\left|\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В самом деле, $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow$ или $\cos^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Зафиксируем $\forall x \in \mathbb{R}$ и докажем, что f в точке x не имеет производной. Для этого положим $h_n = \pm\frac{\pi}{2}\cdot 8^{-n}$, $h_n > 0$ при $\left|\cos\left(8^n x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $h_n < 0$ при $\left|\cos\left(8^n x-\frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Последовательность $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Преобразуем дробь

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \sum \frac{\sin(8^k x + 8^k h_n) - \sin(8^k x)}{2^k h_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \quad (2)$$

(*) $k > n \Rightarrow 8^k h_n = \pm 8^{k-n-1} \cdot 4\pi$ – это период синуса $\Rightarrow \alpha_k = 0$.

При $k < n$

$$|\alpha_k| = \frac{8^k |h_n|}{2^k |h_n|} = 4^k \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = \frac{4^n - 1}{3} < \frac{1}{3} 4^n. \quad (3)$$

$$|\alpha_n| = \frac{2\left|\sin\left(\frac{1}{2} 8^n h_n\right)\right| \cdot \left|\cos\left(8^n x + \frac{1}{2} 8^n h_n\right)\right|}{2^n |h_n|} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot 4^n \left|\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \frac{2}{\pi} 4^n$$

в силу выбора знаков h_n. Отсюда и из (2) и (3) следует:

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| \geqslant \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}\right) 4^n \Rightarrow \left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

и потому у функции f в точке x не существует производной.

Этот пример для общего математического образования предпочтительнее примера Ван-дер-Вардена по следующим причинам: I) в примере Ван-дер-Вардена $f(x)=\sum\varphi_n(x)$, где φ_n уже не имеют производной в ряде точек, в то время как каждый член ряда (I) имеет производные всех порядков в $\mathbb{R}$ и 2) ряд (I) в некотором смысле "подпирает" теорему Вейерштрасса о рядах аналитических функций комплексного переменного:

<u>Теорема (Вейерштрасса)</u>. Функции f_n аналитичны в области G комплексного переменного при $\forall n$ и ряд

$$\sum f_n(z) \qquad (4)$$

сходится равномерно в каждой замкнутой области $\overline{G}'\subset G$. Тогда сумма ряда (4) аналитична в области G и производная суммы равна сумме производных для этого ряда.

Если у ряда (I) вместо переменной x подставить комплексную переменную z, то каждый член ряда будет аналитической функцией комплексного переменного z, а его сумма только непрерывна на действительной оси и не имеет производной. Причина этого в том, что члены ряда не стремятся к нулю при $\forall z$ таком, что $\operatorname{Im} z\neq 0$. потому ряд расходится - нет в комплексной плоскости области, в которой сходился бы полученный ряд.

Приведем еще традиционную задачу - вычисление площади в полярных координатах. На плоскости введены полярные координаты (ρ,θ), функция $f\in C[\alpha,\beta],\ [\alpha,\beta]\subset[\alpha,\alpha+2\pi]$ и $f\geqslant 0$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, множество $A=\{(\rho,\theta)\,|\,\theta\in[\alpha,\beta]$ и $0\leq\rho\leq f(\theta)\}$ (рис.6). Покажем, что A измеримо и

$$\mu_2 A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Разобьем A лучами $\theta=\theta_{ni}=\alpha+i(\beta-\alpha)2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, $i=0,1,\ldots,2^n$, на "секторы" $A_{ni}=\{(\rho,\theta)\,|\,\theta\in[\theta_{ni-1},\theta_{ni}]$ и $0\leq\rho\leq f(\theta)\}$. Для $\forall(n,i)$ $\exists\,\xi_{ni}\in[\theta_{ni-1},\theta_{ni}]$ - точка максимум f на $[\theta_{ni-1},\theta_{ni}]$. Тогда $A_{ni}\subset B_{ni}=\{(\rho,\theta)\,|\,\theta\in[\theta_{ni-1},\theta_{ni}]$ и $0\leq\rho\leq f(\xi_{ni})\}$, $\mathcal{B}_n=\bigcup_i B_{ni}$

измеримы (рис.7) и $\mathcal{D}_n \supset \mathcal{D}_{n+1}$ при $\forall n$, $A = \cap \mathcal{D}_n \Rightarrow A$ измеримо и $\mu_2 A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_2 \mathcal{D}_n$. Но $\mu_2 \mathcal{D}_n = \sum\limits_i \mu_2 B_{ni} = \sum\limits_i \frac{1}{2} f^2(\xi_{ni}) \Delta\theta_{ni}$ – это интегральная сумма для функции $\frac{1}{2} f^2 \in C[\alpha, \beta]$ по отрезку $[\alpha, \beta]$ и потому $\exists \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_2 \mathcal{D}_n = \mu_2 A$.

Рисунки

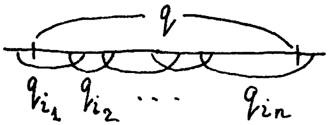

рис. 1

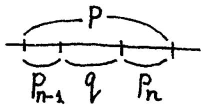

рис. 2

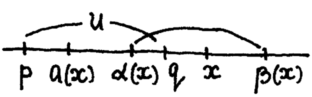

рис. 3

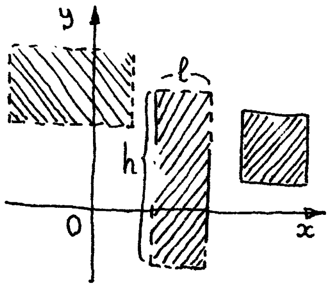

рис. 4 (*)

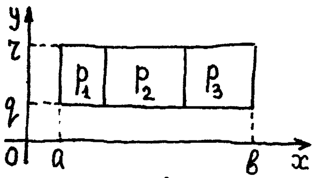

рис. 5

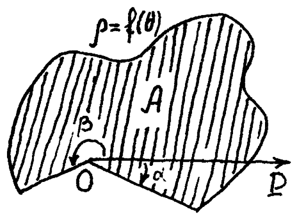

рис. 6

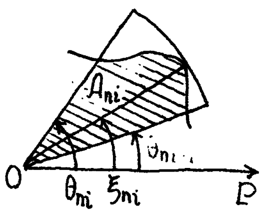

рис. 7

(*) На рисунке 4 пунктиром отмечена та часть границы, которая не принадлежит прямоугольнику.

Послесловие

Предложенный материал, наверное, убедил читателя в том, что начальные сведения об интеграле Лебега не сложнее теории интеграла Римана (в том объеме, в котором она присутствует в курсах математического анализа для студентов физико-математических специальностей). При этом не стоит забывать того, что вопросы меры множества все равно присутствуют в курсе, только там это мера Жордана. Поэтому наше предложение — не тратить время на интеграл Римана (сведения о нем свести к минимуму, удобному для приложений, например, для функций непрерывных на отрезке - Т.1 в дополнении), а сразу излагать меру и интеграл Лебега (как это было сделано у Валле-Пуссена в "Курсе анализа бесконечно малых". Третье издание вышло в Париже в 1914г., его переводы у нас выходили в 1922 и в 1933 гг.). И тогда уже на первом курсе в математическом арсенале оказывается мощнейшее орудие исследования. На этой базе могут быть проведены обобщения как угодно глубокие и выявлены дальнейшие тонкие свойства интегрирования. Мы уверены в том, что первый шаг должен быть достаточно простым и наглядным. Не стоит также упускать из виду и того, что интегралы кратные, криволинейные и по поверхности (I-го рода) уже не требуют специальных начальных рассмотрений. И особенно привлекает значительное упрощение достаточных условий перестановочности знаков предела и интеграла и соответствующие следствия для функциональных рядов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Подписано к печати 11.03.93 г.
Заказ № 96 Тираж 300 экз.
Отпечатано в ЛИК МГУ